

Analyse de faibles nonlinéarités par la transformée en ondelettes

Joseph LARDIES

Institut FEMTO-ST, Département de Mécanique Appliquée, 24 rue de l'Épitaphe ; 25000 Besançon ;
France

joseph.lardies@univ-fcomte.fr

Résumé – La transformée en ondelettes est un outil efficace pour le traitement de signaux modulés en amplitude et en phase puisqu'elle permet d'obtenir les variations temporelles de l'amplitude et la phase instantanées de chaque composante du signal. La transformée en ondelettes a déjà été utilisée avec succès pour identifier les caractéristiques modales de structures linéaires. Dans cette communication son utilisation est étendue aux réponses libres d'oscillateurs possédant des nonlinéarités en amortissement et en raideur. A partir du squelette de la transformée en ondelettes nous pouvons identifier les paramètres nonlinéaires du système en vibration. Des résultats numériques et expérimentaux sont présentés.

Mots clés : Transformée en ondelettes / nonlinéarités / amortissement composé / identification modale.

Abstract – The wavelet transform is an efficient tool for the processing of modulated signals in amplitude and in phase since it allows to reach the time variations of instantaneous amplitude and phase of each component of the signal. The wavelet transform has been used for modal analysis in linear structures. In this communication the wavelet transform is generalized for nonlinear identification. Nonlinearities on damping and stiffness are considered and from the skeleton of the wavelet transform we can identify these nonlinearities. Numerical and experimental results are presented.

Key words : Wavelet transform / nonlinearities / composite damping / modal parameter identification..

1 Introduction

C'est avec succès que la transformée en ondelettes (T.O.) a été utilisée lors de la dernière décennie pour identifier les paramètres modaux dans les systèmes linéaires en vibration [1,2]. L'identification de nonlinéarités par la T.O. a commencé à être étudiée par W.J. Staszewski [3] où il utilise comme ondelette analysante l'ondelette de Morlet et une raideur cubique dans son oscillateur. Plus tard, T.P. Le et P. Argoul [4] utilisent l'ondelette de Cauchy comme ondelette analysante et des oscillateurs à raideur bilinéaire et à raideur cubique. Dans cette communication on généralise la méthode d'identification par la T.O. aux systèmes non linéaires en amortissement et en raideur. Ainsi la section 2 présente les équations approchées de l'amplitude et de la phase d'un système à un degré de liberté (d.d.l) avec des non-linéarités en amortissement et en raideur. Dans la section 3, la méthode de la T.O. et ses propriétés sont exposées. Le concept d'arête et de squelette de la T.O. permettant la reconstitution du signal sont également décrits. La méthode exposée est appliquée dans la section 4 sur un système simulé à 2 d.d.l. présentant des nonlinéarités ainsi que sur des essais expérimentaux. Une brève conclusion est formulée dans la section 5.

2 Réponse libre d'un oscillateur non linéaire à 1 d.d.l.

2.1 Etude générale

L'équation différentielle du mouvement d'un oscillateur non linéaire à 1 d.d.l. se met sous la forme :

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x + \varepsilon f(x, \dot{x}) = 0 \quad (1)$$

où ω_n est la pulsation naturelle du système linéaire, ε un paramètre sans dimension infiniment petit et $f(x, \dot{x})$ une fonction non linéaire de $x(t)$ et de $\dot{x}(t)$. En utilisant la méthode Krylov-Bogoliubov [5], la solution analytique de l'équation (1) peut se mettre sous la forme :

$$x(t) = A(t)\cos(\omega_n t + \beta(t)) = A(t)\cos(\varphi(t)) \quad (2)$$

avec $A(t)$ et $\varphi(t)$ les modulations en amplitude et en phase de la réponse libre de l'oscillateur, $\varphi(t) = \omega_n t + \beta(t)$. Puisque nous avons deux fonctions $A(t)$ et $\varphi(t)$ à déterminer, nous allons imposer deux conditions. La première condition est relative à la vitesse $\dot{x}(t)$: elle a la même forme que celle d'un oscillateur harmonique ($\varepsilon=0$). Nous obtenons :

$$\dot{A}(t) \cos\varphi(t) - A(t) \dot{\beta}(t) \sin\varphi(t) = 0 \quad (3)$$

La deuxième condition est que ces deux fonctions doivent vérifier l'équation (1), de sorte que nous nous déduisons :

$$\omega_n \dot{A}(t) \sin\varphi(t) + \omega_n A(t) \dot{\beta}(t) \cos\varphi(t) = \varepsilon f(A(t)\cos\varphi(t), -\omega_n A(t)\sin\varphi(t)) \quad (4)$$

En considérant (3) et (4) nous obtenons un système de deux équations à deux inconnues $\dot{A}(t)$ et $\dot{\beta}(t)$.

Après résolution de ce système et en moyennant sur une période, nous obtenons :

$$\dot{A}(t) = \frac{\varepsilon}{2\pi\omega_n} \int_0^{2\pi} \sin\varphi(t) f(A(t)\cos\varphi(t), -\omega_n A(t)\sin\varphi(t)) d\varphi \quad (5)$$

$$\dot{\beta}(t) = \frac{\varepsilon}{2\pi\omega_n A(t)} \int_0^{2\pi} \cos\varphi(t) f(A(t)\cos\varphi(t), -\omega_n A(t)\sin\varphi(t)) d\varphi \quad (6)$$

Ces deux équations nous permettent d'obtenir des expressions analytiques approchées permettant de décrire le comportement d'un oscillateur non linéaire pour une fonction $f(x(t), \dot{x}(t))$ donnée.

2.2 Oscillateur à amortissement composé non linéaire

L'oscillateur est amorti par une force dissipative, qui est en général non linéaire, et qui dépend de la vitesse. Cette force se met sous la forme :

$$\varepsilon f(\dot{x}) = \sum_{i=0}^p \mu_i |\dot{x}|^i \text{sign}(\dot{x}) \quad (7)$$

où μ_i est le $i^{\text{ème}}$ coefficient d'amortissement normalisé à la masse de l'oscillateur et p l'ordre maximal considéré. Cette équation nous permet de prendre en compte les différentes non linéarités liées à l'amortissement et agissant simultanément sur l'oscillateur. Ainsi on pourra considérer dans cette sommation le frottement sec (ou de Coulomb), l'amortissement linéaire (ou visqueux), l'amortissement quadratique (provenant de forces aérodynamiques), l'amortissement cubique... en fonction de l'ordre p considéré. Grâce à cette équation nous pourrions modéliser la force dissipative réelle agissant sur le système en vibration étudié. L'expression approchée de la réponse libre d'un oscillateur à 1 d.d.l. ayant un amortissement composé est obtenue en déterminant d'abord l'amplitude $A(t)$. En combinant les équations (5) et (7) nous obtenons :

$$\dot{A}(t) = -\frac{1}{\pi\omega_n} \int_0^\pi \sum_{i=0}^p \mu_i \omega_n^i A(t)^i \sin^{i+1}\varphi d\varphi \quad (8)$$

$$\dot{A}(t) = - \sum_{i=0}^P \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mu_i \omega_n^{i-1} \frac{\Gamma(i/2 + 1)}{\Gamma(i/2 + 3/2)} A(t)^i \quad (9)$$

On pose :

$$c_i = - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mu_i \omega_n^{i-1} \frac{\Gamma(i/2 + 1)}{\Gamma(i/2 + 3/2)} \quad (10)$$

de sorte que la dérivée de l'enveloppe s'écrit :

$$\dot{A}(t) = \sum_{i=0}^P c_i A(t)^i \quad (11)$$

Les coefficients c_i dépendent des non linéarités en amortissement et sont liés aux coefficients d'amortissement μ_i . Nous pourrions par cette relation caractériser et identifier l'amortissement composé d'un système en déterminant le couple (p, μ_i) . L'amplitude instantanée d'un oscillateur à amortissement composé, pour un ordre p donné et pour une combinaison de coefficients d'amortissement donnée, sera obtenue par résolution analytique ou numérique de l'équation (11). Suivant l'équation (6) nous obtenons pour un oscillateur à amortissement composé $\dot{\beta}(t) = 0$, par conséquent la phase $\beta(t)$ est constante.

2.3 Oscillateur à raideur non linéaire

La non linéarité en raideur de l'oscillateur est définie par :

$$F(x) = \eta \left| x \right|^q \text{sign}(x) \quad (12)$$

où η est le coefficient de raideur non linéaire à l'ordre q normalisée à la masse de l'oscillateur. L'amplitude approchée $A(t)$ d'un tel oscillateur est obtenue en considérant (5) et (12) :

$$\dot{A}(t) = \frac{\eta_q}{2\pi\omega_n} \int_0^{2\pi} \sin \varphi(t) |A(t) \cos \varphi(t)|^q \text{sgn}(A(t) \cos \varphi(t)) d\varphi \quad (13)$$

Après développement nous obtenons $\dot{A}(t) = 0$. Par conséquent, la présence de non linéarités en raideur n'influe pas sur la décroissance en amplitude de l'oscillateur. La phase instantanée d'un tel oscillateur est obtenue en considérant (6) et (12). Nous déduisons :

$$\dot{\beta}(t) = \frac{\eta_q A^{q-1}(t)}{2\omega_n} \left(1 + (-1)^{q+1} \right) \left[\frac{\Gamma(q+2)}{2^{q+1} (\Gamma(q/2 + 3/2))^2} \right] \quad (14)$$

$$\text{On pose : } r_q = \frac{\eta_q}{2\omega_n} \left(1 + (-1)^{q+1} \right) \left[\frac{\Gamma(q+2)}{2^{q+1} (\Gamma(q/2 + 3/2))^2} \right] \quad (15)$$

de sorte que nous obtenons :

$$\dot{\beta}(t) = r_q A(t)^{q-1} \quad (16)$$

et la pulsation instantanée de l'oscillateur est :

$$\dot{\phi}(t) = \omega_n + \dot{\beta}(t) = \omega_n + r_q A(t)^{q-1} \quad (17)$$

La raideur non linéaire influe sur la phase et les coefficients (q, r_q) déterminés par (15) sont valables si et seulement si l'ordre q de la non linéarité en raideur est impair. L'équation (17) présente la relation pulsation instantanée-amplitude instantanée pour un oscillateur non linéaire en raideur. Nous pourrions grâce à cette relation caractériser et identifier la non linéarité en raideur en déterminant le couple (q, r_q) . Par exemple, en considérant un oscillateur de Duffing (raideur cubique, $q=3$) nous

$$\text{obtenons } \dot{\phi}(t) = \omega_n + \frac{3\eta_3}{8\omega_n} A(t)^2 \text{ qui décrit les}$$

variations de la pulsation instantanée en fonction de l'amplitude instantanée de l'oscillateur.

2.4 Oscillateur à amortissement composé non linéaire et à raideur non linéaire

Pour un oscillateur à amortissement composé et à raideur non linéaire, la force dissipative se met sous la forme

$$F(x, \dot{x}) = \sum_{i=0}^p \mu_i \left| \dot{x} \right|^i \text{sign}(\dot{x}) + \eta \left| x \right|^q \text{sign}(x) \quad (18)$$

La dérivée de l'enveloppe $\dot{A}(t)$ est la somme d'un premier terme provenant de l'amortissement composé et d'un deuxième terme provenant de la raideur non linéaire qui est nul. Pour ce type d'oscillateur, la présence de non linéarités en raideur n'a pas d'incidence sur l'amplitude instantanée, seul l'amortissement va influencer sur l'amplitude (équation 9). De façon similaire, la dérivée de la phase $\dot{\beta}(t)$ est la somme d'un premier terme provenant de l'amortissement composé qui est nul et d'un deuxième terme provenant de la raideur non linéaire. En définitive, la présence de non linéarités en amortissement n'influe pas sur la phase de l'oscillateur, seule la raideur non linéaire influe sur la phase (équation 14). Notre but est d'identifier les paramètres non linéaires d'un oscillateur en utilisant la transformée en ondelettes (T.O.) du mouvement de cet oscillateur.

3 Identification des paramètres non linéaires par la transformée en ondelettes

3.1 Théorie et généralités

Par rapport à la transformée de Fourier, l'idée de base de la transformée en ondelettes est de décomposer un signal $x(t)$ (ou un déplacement)

selon une autre base que celle des sinusoides, chaque base d'ondelettes possédant des propriétés particulières qui guident son utilisation pour le type de problème posé. Le signal $x(t)$ va donc être décomposé sur une famille de fonctions translatées et dilatées à partir d'une fonction unique $\psi(t)$ appelée ondelette mère. La famille se met sous la forme [6]

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (19)$$

et est appelée ondelette analysante, avec a paramètre de dilatation ou paramètre d'échelle définissant la largeur de la fenêtre d'analyse. La variable a joue le rôle de l'inverse de la fréquence: plus a est faible moins l'ondelette analysante est étendue temporellement, donc plus la fréquence centrale de son spectre est élevée. Le paramètre b est le paramètre de translation localisant l'ondelette analysante dans le domaine temporel. Modifier a et b permet d'avoir des ondelettes à la fréquence voulue et à l'instant souhaité. En notant $\psi^*(t)$ le conjugué de $\psi(t)$, la T.O. du signal $x(t)$ est définie par :

$$(W_{\psi}x)(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (20)$$

Cette analyse permet de décrire le contenu de $x(t)$ localement au voisinage de (a, b) dans le plan temps-échelle. Elle nous indique l'importance relative de la fréquence $1/a$ autour du point b (ou à l'instant b) pour le signal $x(t)$. Ainsi, si $x(t)$ vibre à une fréquence nettement moins élevée ou, au contraire, beaucoup plus élevée que $1/a$, le module du coefficient de la T.O. sera très petit et quasiment négligeable. Il ne devient conséquent que si le signal contient une composante de cette fréquence au point considéré. Les coefficients de la T.O. sont donc un moyen de repérer avec précision l'apparition d'une fréquence donnée à un instant donné dans un signal. Cette décomposition est fonction de deux variables a et b et évalue la pertinence de l'utilisation de l'ondelette dans la description de $x(t)$. La T.O. est une représentation linéaire du signal, ceci implique que la T.O. de M signaux (ou d'un système à M modes de vibration) devient :

$$(W_{\psi} \sum_{i=1}^M x_i)(a, b) = \sum_{i=1}^M (W_{\psi} x_i)(a, b) \quad (21)$$

Cette propriété est pratique pour l'analyse de signaux multi-composantes. L'ondelette choisie habituellement est l'ondelette de Morlet, définie par

$$\psi(t) = e^{j 2 \pi f_0 t} e^{-t^2/2} \quad (22)$$

où f_0 est la fréquence propre de l'ondelette. L'un des avantages de l'ondelette de Morlet est qu'elle est bien adaptée pour analyser toute sorte de signal

vibratoire. La transformée de Fourier de cette fonction dilatée est

$$\Psi(af) = \sqrt{2 \pi} e^{-2 \pi^2 (af - f_0)^2} \quad (23)$$

et atteint son maximum lorsque le paramètre de dilatation est égal à $a = f_0/f$. Connaissant f_0 et ayant trouvé une fréquence propre du signal à étudier nous pourrions utiliser cette relation pour déduire le paramètre de dilatation. L'ondelette de Morlet dilatée est un filtre passe-bande de fréquence centrale $f_c = f_0/a$ dont la largeur est proportionnelle à $1/a$. Il faut noter que si la fréquence analysée est importante, le paramètre de dilatation devient faible et la fenêtre fréquentielle de la fonction analysante large. Dans cette étude une autre ondelette, appelée ondelette de Morlet modifiée, sera utilisée. Elle se met sous la forme :

$$\psi(t) = e^{j 2 \pi f_0 t} e^{-t^2/N} \quad (24)$$

avec $N > 0$, dont la transformée de Fourier dilatée est

$$\Psi(af) = \sqrt{N \pi} e^{-N \pi^2 (af - f_0)^2} \quad (25)$$

Lorsque N croît la résolution fréquentielle augmente au détriment de la résolution temporelle. Il y a une valeur optimale de N donnant la meilleure résolution temps-fréquence, pour un signal $x(t)$ donné et analysé avec l'ondelette de Morlet modifiée.

3.2 Entropie des coefficients de la T.O.

Pour déterminer l'ondelette de Morlet modifiée optimale, c'est à dire pour évaluer la valeur optimale du paramètre N , nous allons utiliser un critère relatif à la dispersion des coefficients de la transformée en ondelettes. La mesure de cette dispersion s'effectue au sens de l'entropie de Shannon. Dans la transformée en ondelettes d'un signal échantillonné $\{x(q)\}$, l'énergie pour chaque paramètre d'échelle a_i est :

$$E_{ai} = \sum_j \left| (W_{\psi}x)(a_i, b_j) \right|^2 ; j = 1, 2, \dots, N \quad (26)$$

où N est le nombre d'échantillons temporels. Dans cette relation on considère les coefficients de la T.O. obtenus pour une valeur de a_i en parcourant le domaine de translation. L'énergie totale est alors obtenue en considérant :

$$E_{\text{total}} = \sum_i E_{ai} ; i = 1, 2, \dots, Q \quad (27)$$

où Q est le nombre d'échelles. Les valeurs normalisées $p_{ai} = E_{ai}/E_{\text{total}}$ représentent la dispersion de l'énergie pour chaque paramètre d'échelle a_i . Il est évident que $\sum_i p_{ai} = 1$ et la distribution $\{p_{ai}\}$ peut

être considérée comme une densité de probabilité d'énergie dans le domaine temps-échelle. L'entropie de Shannon nous fournit un critère utile afin d'analyser et de comparer cette dispersion. On

définit l'entropie des coefficients de la transformée en ondelettes par

$$WE = - \sum_i p_{ai} \log(p_{ai}) \quad (28)$$

Cette relation permet de mesurer le degré de désordre ou d'imprévisibilité de l'énergie des coefficients de la transformée en ondelettes. La valeur du paramètre N minimisant la fonction WE(N) sera la valeur optimale attribuée à l'ondelette de Morlet modifiée. Cette valeur optimale donnera la meilleure résolution temps-échelle pour un signal x(t) analysé avec l'ondelette de Morlet modifiée.

3.3 Extraction de l'arête de la T.O. et identification des non linéarités

Soit $x(t) = A(t) \cos(\varphi(t))$ un signal modulé en amplitude et en phase qui est en réalité le déplacement de l'oscillateur non linéaire. La T.O. de x(t) est

$$(W_{\Psi} x)(a, b) = (1/2) \sqrt{a} A(b) \Psi^*(a \dot{\varphi}(b)) e^{j\varphi(b)} \quad (29)$$

avec $\dot{\varphi}(b) = d\varphi/db$ la pulsation instantanée de x(t).

Le paramètre de dilatation est déterminé aux points d'énergie maximale, c'est à dire lorsque le module de la T.O. est maximum. On obtient alors l'arête de T.O. En considérant l'ondelette de Morlet modifiée, nous avons sur l'arête $\Psi(a \dot{\varphi}(b))$ qui est maximum et les valeurs du paramètre d'échelle vérifient :

$$a = a(b) = \omega_0 / \dot{\varphi}(b) \quad (30)$$

L'équation (29) se réduit alors à:

$$(W_{\Psi} x)(a(b), b) = (1/2) \sqrt{N \pi a(b)} A(b) e^{j\varphi(b)} \quad (31)$$

dont le module est proportionnel à l'amplitude du signal (ou du déplacement) x(t) à analyser et dont l'argument correspond à la phase du signal. Nous avons donc :

$$A(b) = 2 \left| (W_{\Psi} x)(a(b), b) \right| / \sqrt{N \pi a(b)} \quad (32)$$

$$\varphi(b) = \text{Arg} \left[(W_{\Psi} x)(a(b), b) \right] \quad (33)$$

A partir de ces relations nous obtenons $\dot{A}(b)$ et $\dot{\beta}(b) = \dot{\varphi}(b) - \omega_n$ qui sont utilisés dans les équations (9) et (14) pour caractériser et identifier les non linéarités. Ainsi, si on ne considère que des non linéarités en amortissement on a $\dot{\beta}(b) = 0$ et la pulsation instantanée $\dot{\varphi}(b)$ est constante et égale à la pulsation propre ω_n du système. Le module de la transformée en ondelettes sera alors utilisé pour déterminer la valeur des coefficients d'amortissement en choisissant la valeur du paramètre d'échelle $a = \omega_0 / \omega_n$ qui est une constante. Si des non linéarités en raideur sont présentes dans le système on a $\dot{\beta}(b) \neq 0$ et le

module de la transformée en ondelettes est maximal le long l'arête de la transformée en ondelettes : $a(b) = \omega_0 / \dot{\varphi}(b)$. La détermination de l'arête conduit immédiatement à la connaissance de $\dot{\varphi}(b)$ et par la suite au coefficient de raideur du système.

Pour un signal à plusieurs composantes, la linéarité de la transformée en ondelettes permet de séparer les modes. Ayant effectué une bonne localisation en temps et en échelle des divers modes, grâce à l'ondelette analysante de Morlet modifiée, on détermine pour chaque i^{ème} mode l'amplitude $A_i(b)$, la phase $\varphi_i(b)$, leurs dérivées et par la suite les paramètres modaux relatifs à chaque mode.

D'après l'équation (31) nous avons :

$$A(b) \cos \varphi(b) = \frac{2}{\sqrt{N \pi a(b)}} \text{Re} (W_{\Psi} x)(a(b), b) \quad (34)$$

par conséquent, en considérant la partie réelle du squelette de la transformée en ondelettes nous pouvons reconstituer le signal ou le déplacement x(t) en utilisant la relation précédente.

4 Applications

4.1 Oscillateur à amortissement composé et à raideur cubique

On considère l'oscillateur à amortissement composé (visqueux + carré) et à raideur cubique. Il est régi par l'équation différentielle :

$$\ddot{x}(t) + 0.45\dot{x}(t) + 0.12x(t)|\dot{x}(t)| + 400x(t) + 500x^3(t) = 0 \quad (35)$$

La réponse libre x(t) est obtenue numériquement par l'algorithme de Runge-Kutta, sur une durée de 14,5 secondes avec 1024 points temporels avec les conditions initiales : $x(t) = 0,5$ m et $\dot{x}(t) = 0$ m/s.

Nous appliquons la transformée en ondelettes à cette réponse temporelle. La figure 1 montre l'amplitude de la transformée en ondelettes ainsi que son arête.

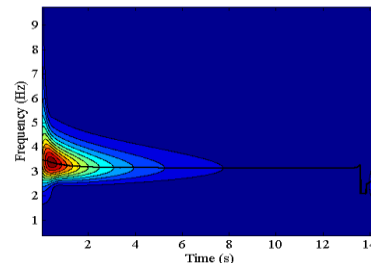


Figure 1. Amplitude de la T.O. et son arête

A partir de cette arête nous déterminons le squelette de la transformée en ondelettes qui est utilisé pour reconstituer le signal et son enveloppe A(t). La comparaison entre le déplacement théorique et le déplacement reconstitué est représentée dans la

figure 2. L'enveloppe estimée dans la zone qui n'est pas affectée par les effets de bords sera utilisée pour la procédure d'identification.

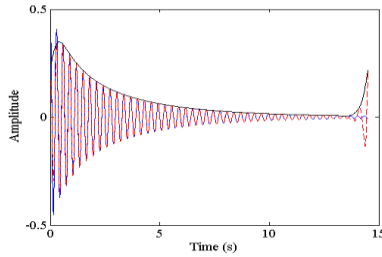


Figure 2. Réponse temporelle théorique et reconstituée

La figure 3 montre les variations de la fréquence en fonction de l'amplitude. La pulsation ω_n est obtenue à partir de cette figure en considérant $A(t)=0$.

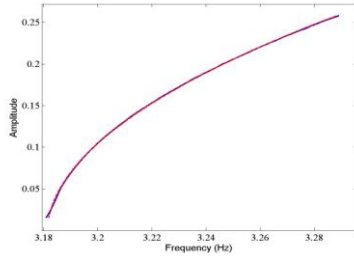


Figure 3. Variations de l'amplitude en fonction de la fréquence

Le coefficient de raideur η_3 est obtenu par régression linéaire de l'équation

$$\dot{\beta}(t) = A(t)^2 (3 \eta_3 / 8 \omega_n) \quad (36)$$

En traçant les variations de $\dot{A}(t)$ en fonction de $A(t)$ on obtient la parabole représentée dans la figure 4.

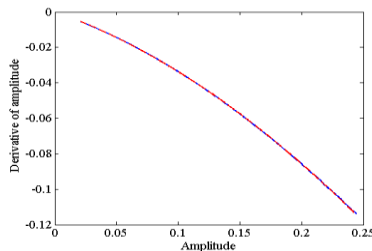


Figure 4. Variations de la dérivée de l'amplitude en fonction de la dérivée de l'amplitude

On effectue une interpolation polynomiale au sens des moindres carrés de cette parabole. Le degré obtenu est deux, ce qui est en concordance avec l'amortissement composé étudié, puisque d'après les équations (9), (10) et (11) nous obtenons :

$$\dot{A}(t) = -\frac{\mu_1}{2} A(t) - \frac{4 \omega_n \mu_2}{3 \pi} A(t)^2 \quad (37)$$

Les coefficients de ce polynôme nous permettent d'identifier les deux coefficients d'amortissement. Le tableau 1 montre les résultats de l'identification en utilisant la T.O.

Paramètres	Valeurs exactes	Valeurs identifiées	Erreur (%)
μ_1 (s ⁻¹)	0,45	0,473	5,1
μ_2 (m ⁻¹)	0,12	0,118	1,7
ω_n (rad/s)	20	20,01	0,05
η_3 (m.s) ⁻²	500	500,4	0,07

Tableau 1. Paramètres exacts et identifiés de l'oscillateur à 1 d.d.l.

4.2 Oscillateur à 2 d.d.l. avec non linéarité en raideur

On considère un système à 2 d.d.l., couplé, et avec une non linéarité en raideur du type cubique. Le système d'équations différentielles est :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 - c_2 \dot{x}_2 - k_4 x_1^3 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + (c_2 + c_3) \dot{x}_2 + (k_2 + k_3) x_2 - k_2 x_1 - c_2 \dot{x}_1 = 0 \end{cases}$$

On fera l'application avec : $m_1=m_2=1$ kg ; $c_1=0,08$ Ns.m⁻¹ ; $c_2 = 0,03$ Ns.m⁻¹ ; $c_3 = 0,05$ Ns.m⁻¹ ; $k_1 = 3$ N.m⁻¹ ; $k_2 = 10$ N.m⁻¹ ; $k_3=5$ N.m⁻¹ ; $k_4 = 170$ N.m⁻¹. Les deux fréquences propres du système linéaire sont $f_1= 0,3163$ Hz et $f_2 = 0,7805$ Hz. Le système différentiel est résolu numériquement par l'algorithme de Runge-Kutta, sur 1024 points de mesure, la durée de l'enregistrement étant de 60 secondes. Les conditions initiales sont : $x_1(0) = -0,14$ m ; $\dot{x}_1(0) = 0$ m.s⁻¹ ; $x_2(0) = 0.04$ m ; $\dot{x}_2(0) = 0$ m.s⁻¹. Les figures 5 et 6 nous montrent la réponse temporelle de $x_1(t)$ et de $x_2(t)$ ainsi que la transformée en ondelettes de $x_2(t)$. L'ondelette analysante est l'ondelette de Morlet modifiée, le paramètre N étant déterminé par minimisation d'entropie.

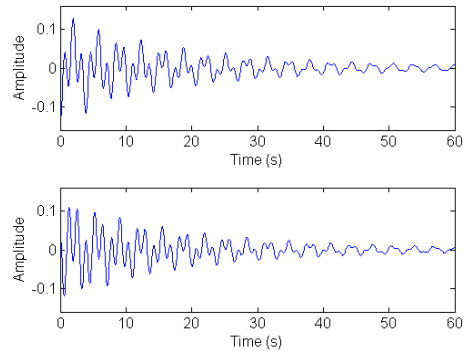


Figure 5. Réponse temporelle de $x_1(t)$ et de $x_2(t)$

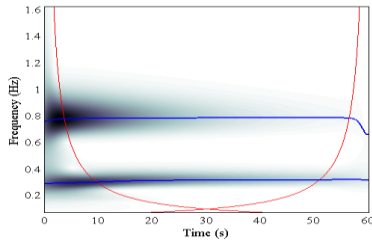


Figure 6. Amplitude de la T.O. de $x_2(t)$ et ses arêtes

L'analyse temps-fréquence nous permet d'isoler et de reconstituer les deux modes de l'oscillateur en utilisant l'arête de la transformée en ondelettes comme l'indique la figure 7.

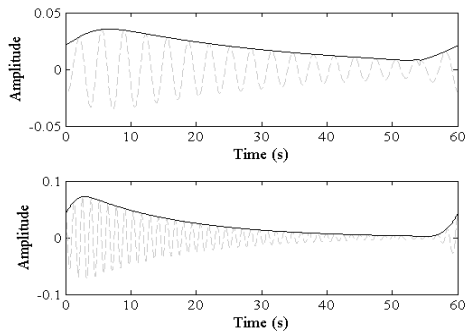


Figure 7. Reconstitution des deux modes et leurs enveloppes

On peut alors appliquer la procédure d'identification décrite précédemment pour un oscillateur à 1 d.d.l., en isolant chaque mode identifié, comme le montre la figure 8 pour le premier mode et la figure 9 pour le deuxième mode de vibration. Les variations d'amplitude en fonction de la fréquence et les variations de $\dot{A}(t)$ en fonction de $A(t)$ pour chaque mode isolé nous permettent d'effectuer l'identification des paramètres modaux. Cette identification nous indique la présence d'une non-linéarité à raideur cubique du type ressort mou et ainsi que la présence de l'amortissement visqueux (la dérivée de l'amplitude en fonction de l'amplitude est une ligne droite passant par l'origine).

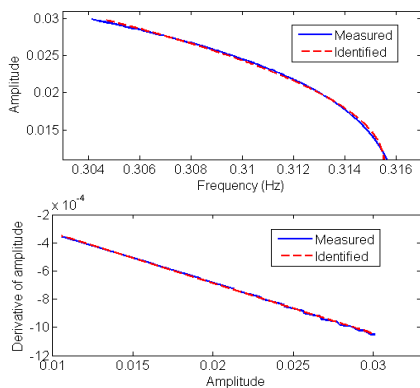


Figure 8. Procédure d'identification pour le premier mode

Les paramètres identifiés sont donnés dans le tableau 2, la dernière colonne représentant l'erreur quadratique normalisée entre la dérivée de l'amplitude du modèle et la dérivée de l'amplitude identifiée par la T.O.

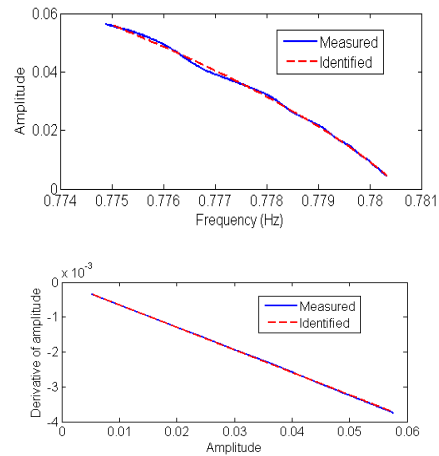


Figure 9. Procédure d'identification pour le deuxième mode

Mode	f_n (Hz)	μ_1 (s^{-1})	η_3 ($m.s$) ⁻²	$\dot{A}(t) - \hat{A}(t)$
1	0,316	0,067	302	5,07e-03
2	0,780	0,124	157	3,72e-03

Tableau 2. Identification des paramètres de l'oscillateur à 2 d.d.l.

Il faut noter que des résultats identiques sont obtenus si on utilise la réponse $x_1(t)$.

4.3 Essais expérimentaux

Les essais sont réalisés au Département de Mécanique Appliquée à Besançon. La structure testée est une poutre encastree-libre. On a au départ une structure linéaire connue, sur laquelle on va introduire des non linéarités (en amortissement et en raideur) par l'intermédiaire de contre-réactions comme l'indique la figure 10. Une contre-réaction non-linéaire en raideur est générée au point 1 par l'intermédiaire d'un capteur de déplacement et d'une bobine excitatrice. Une contre-réaction non-linéaire en amortissement est introduite au point 2 par un capteur de vitesse et une bobine excitatrice. Pour obtenir la réponse libre du premier mode on excite la poutre grâce à une bobine située au point 3 et on coupe par la suite l'excitation. On enregistre alors la réponse libre du système. Les mesures sont effectuées grâce à une chaîne d'acquisition Siglab 8 voies reliée à un PC.

Trois essais ont été effectués en appliquant une non linéarité de type raideur cubique ayant des amplitudes différentes. Ceci conduit à des raideurs cubiques de type 'faible', 'moyenne' et 'forte'.

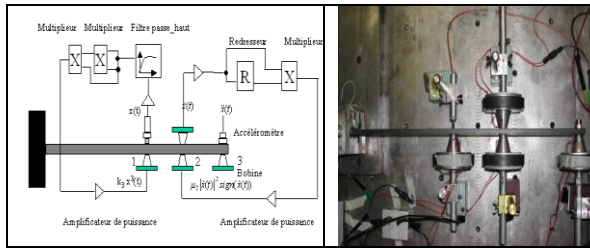


Figure 10. Montage expérimental

La figure 11 nous montre la réponse temporelle en considérant une raideur cubique de type "moyenne". Nous appliquerons la T.O. à cette réponse temporelle et effectuerons par suite l'identification des non linéarités.

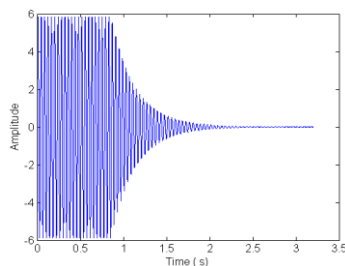


Figure 11. Réponse temporelle mesurée

Nous utilisons la transformée en ondelettes des signaux provenant du capteur déplacement pour identifier les paramètres modaux. La figure 12 nous montre les résultats obtenus en considérant une raideur cubique de type "moyenne". La parabole de cette figure montre que la non linéarité en raideur est de type cubique ressort 'raide'. La fréquence tend vers la fréquence propre du système linéaire lorsque l'amplitude tend vers zéro.

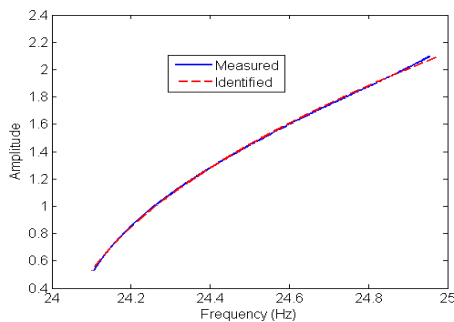


Figure 12. Variations de l'amplitude en fonction de la fréquence

La figure 13 nous montre les variations de la dérivée de l'amplitude en fonction de l'amplitude. C'est grâce à elle que nous obtenons les coefficients d'amortissement du système. Ici, on trouve une droite qui passe par l'origine, par conséquent l'amortissement est de type visqueux. La détermination de la pente de la droite nous permet d'obtenir la valeur du coefficient d'amortissement normalisé à la masse.

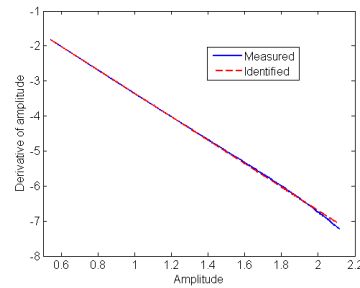


Figure 13. Variations de la dérivée de l'amplitude en fonction de la dérivée de l'amplitude

Les paramètres identifiés lors des trois essais sont indiqués dans le tableau 3.

Essai	μ_1 (s ⁻¹)	f_n (Hz)	η_3 (m.s) ⁻²
raideur 'faible'	7,073	24,10	224,813
raideur 'moyenne'	6,841	24,08	490,553
raideur 'forte'	6,969	23,97	1148,7

Tableau 3. Résultats d'identification par T.O.

5 Conclusion

L'arête et le squelette de la transformée en ondelettes ont été utilisés pour caractériser et identifier les faibles non linéarités en déplacement et en vitesse dans les oscillateurs. Des tests numériques et expérimentaux ont été présentés. Les résultats obtenus sont excellents et cohérents avec la physique du problème. Ils montrent l'efficacité de la T.O. lors de la caractérisation de faibles non linéarités dans les systèmes en vibration.

6 Bibliographie

- [1] M. Ruzzene, A. Fasana, L. Garibaldi, B. Piombo, Natural frequencies and dampings identification using the wavelet transform : application to real data, Mecha. Syst. Sign. Proces. 11 (1997) 207-218
- [2] J. Lardiès, S. Gouttebroze Identification of modal parameters using the wavelet transform, Int. J. of Mecha. Sciences 44 (2002) 2263-2283
- [3] W.J. Staszewski Identification of non-linear systems using multi-scale ridges and skeletons of the wavelet transform, J. of Sound and Vibration; 214(1998) 639-658
- [4] P. Argoul, Le T.P. Instantaneous indicators of structural behaviour based on the continuous Cauchy wavelet analysis, Mecha. Syst. Sign. Proces 17 (2003) 243-250
- [5] A.H. Nayfeh, Perturbation Methods, John Wiley and Sons, New-York, 1973
- [6] B. Torresani Analyse Continue par Ondelettes, CNRS Editions Paris, 1995