

# Identification de faibles non-linéarités dans les oscillateurs par la transformée en ondelettes

JOSEPH LARDIES

Institut FEMTO-ST ; Département de Mécanique Appliquée

24 rue de l'Épitaphe, 25000 Besançon, France

[joseph.lardies@univ-fcomte.fr](mailto:joseph.lardies@univ-fcomte.fr)

**Résumé** – La transformée en ondelettes a déjà été utilisée avec succès pour identifier les paramètres modaux de systèmes mécaniques linéaires en vibration. Dans cette communication, on généralise son utilisation pour identifier, caractériser et quantifier les faibles non-linéarités en amortissement et en raideur apparaissant dans les oscillateurs mécaniques. La détermination de ces paramètres non linéaires s'effectue à partir des données temporelles issues du déplacement de l'oscillateur et en traitant ces données grâce au squelette de la transformée en ondelettes. Des exemples numériques et expérimentaux sont présentés montrant l'efficacité de la méthode.

**Abstract** – The wavelet transform has been used successfully for modal parameter identification in linear vibrating systems. In this paper we generalize the wavelet transform method for the identification, characterization and quantification of weak nonlinearities in damping and stiffness of vibrating systems. From the skeleton of the wavelet transform we can determine the non linear parameters of the mechanical oscillator. Numerical and experimental results are presented showing the effectiveness of the method.

## 1. Introduction

La transformée en ondelettes (T.O.) a été utilisée avec succès ces dernières années pour identifier les paramètres modaux (fréquences propres, coefficients d'amortissement et déformées modales) de structures linéaires en vibration [1,2]. Dans cette communication nous généralisons la méthode d'identification par la T.O. aux systèmes vibrants ayant des non linéarités en amortissement et en raideur. L'originalité de cette communication réside :

- dans la détermination de l'ondelette analysante qui est obtenue par minimisation de l'entropie des coefficients de la transformée en ondelettes. On propose donc une nouvelle ondelette analysante
- dans l'identification, la caractérisation et la quantification de faibles non-linéarités en raideur et en amortissement d'un oscillateur mécanique
- dans les résultats numériques et expérimentaux qui valident la procédure de détermination de faibles non-linéarités.

C'est grâce au squelette de la T.O. de la réponse de l'oscillateur non linéaire que nous pourrions effectuer la caractérisation, l'identification et la quantification des paramètres non linéaires. La section 2 présente les équations approchées de l'amplitude et de la phase d'un oscillateur non linéaire à un degré de liberté (d.d.l). Dans la section 3, la méthode de la T.O. est exposée. Dans la section 4 la méthode est appliquée en simulation et sur des essais expérimentaux. Une brève conclusion est formulée dans la section 5.

## 2. Réponse d'un oscillateur non linéaire

### 2.1 Etude générale

L'équation différentielle du mouvement d'un oscillateur non linéaire à 1 d.d.l. se met sous la forme :

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x + \varepsilon f(x, \dot{x}) = 0 \quad (1)$$

où  $x=x(t)$  est le déplacement de l'oscillateur,  $\dot{x} = dx/dt$  la vitesse,  $\ddot{x} = d^2x/dt^2$  l'accélération,  $\omega_n$  la pulsation naturelle,  $\varepsilon$  un paramètre sans dimension infiniment petit et  $f(x, \dot{x})$  une fonction non linéaire de  $x(t)$  et de  $\dot{x}(t)$ . En utilisant la méthode Krylov-Bogoliubov [3], la solution analytique de l'équation (1) peut se mettre sous la forme :

$$x(t) = A(t)\cos(\omega_n t + \beta(t)) = A(t)\cos(\varphi(t)) \quad (2)$$

avec  $A(t)$  et  $\varphi(t) = \omega_n t + \beta(t)$  les modulations d'amplitude et de phase de la réponse libre de l'oscillateur. Puisque nous avons deux fonctions  $A(t)$  et  $\varphi(t)$  à déterminer, nous allons imposer deux conditions. La première condition est relative à la vitesse  $\dot{x}(t)$  : elle a la même forme que celle d'un oscillateur harmonique ( $\varepsilon = 0$ ). Nous obtenons :

$$\dot{A}(t) \cos\varphi(t) - A(t) \dot{\beta}(t) \sin\varphi(t) = 0 \quad (3)$$

La deuxième condition est que ces deux fonctions doivent vérifier l'équation (1), de sorte que nous nous déduisons :

$$\omega_n \dot{A}(t) \sin\varphi(t) + \omega_n A(t) \dot{\beta}(t) \cos\varphi(t) = \varepsilon f(A(t)\cos\varphi(t), -\omega_n A(t)\sin\varphi(t)) \quad (4)$$

En considérant (3) et (4) nous obtenons un système de deux équations à deux inconnues  $\dot{A}(t)$  et  $\dot{\beta}(t)$ . Après résolution de ce système et en moyennant sur une période, nous obtenons :

$$\dot{A}(t) = \frac{\varepsilon}{2\pi\omega_n} \int_0^{2\pi} \sin\varphi(t) f(A(t)\cos\varphi(t), -\omega_n A(t)\sin\varphi(t)) d\varphi \quad (5)$$

$$\dot{\beta}(t) = \frac{\varepsilon}{2\pi\omega_n A(t)} \int_0^{2\pi} \cos\varphi(t) f(A(t)\cos\varphi(t), -\omega_n A(t)\sin\varphi(t)) d\varphi \quad (6)$$

Ces deux équations nous permettent d'obtenir des expressions analytiques approchées permettant de décrire le comportement d'un oscillateur non linéaire pour une fonction  $f(x(t), \dot{x}(t))$  donnée.

## 2.2 Oscillateur à amortissement composé et à raideur non linéaire

Considérons le cas général d'oscillateurs à amortissement composé et à raideur non linéaire :

$$\varepsilon f(x, \dot{x}) = \sum_{i=0}^p \mu_i |\dot{x}|^i \text{sign}(\dot{x}) + \eta_q |x|^q \text{sign}(x) \quad (7)$$

où  $p$  est l'ordre maximum du système étudié,  $\mu_i$  le  $i^{\text{ème}}$  coefficient d'amortissement normalisé à la masse,  $\eta_q$  le coefficient de raideur à l'ordre  $q$  normalisé à la masse du système. En considérant les équations (5) et (7) nous obtenons  $\dot{A}(t) = \dot{A}_1(t) + \dot{A}_2(t)$ . Le premier terme  $\dot{A}_1(t)$  est issu de l'amortissement composé et le deuxième terme  $\dot{A}_2(t)$  provient de la raideur non linéaire. On montre que ce deuxième terme est nul de sorte que :

$$\dot{A}(t) = \dot{A}_1(t) = -\frac{1}{\pi \omega_n} \int_0^\pi \sum_{i=0}^p \mu_i \omega_n^i A(t)^i \sin^{i+1} \varphi \, d\varphi \quad (8)$$

$$\dot{A}(t) = -\sum_{i=0}^p \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mu_i \omega_n^{i-1} \frac{\Gamma(i/2+1)}{\Gamma(i/2+3/2)} A(t)^i = \sum_{i=0}^p c_i A(t)^i \quad (9)$$

avec  $c_i = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \mu_i \omega_n^{i-1} \frac{\Gamma(i/2+1)}{\Gamma(i/2+3/2)}$ . Les coefficients  $c_i$

dépendent des non linéarités en amortissement et sont liés aux coefficients d'amortissement  $\mu_i$ . Nous pourrions par cette relation caractériser, identifier et quantifier l'amortissement d'un oscillateur non linéaire en déterminant le couple  $(p, \mu_i)$ . La présence des non linéarités en raideur n'influe pas sur l'amplitude instantanée  $A(t)$  du signal obtenu.

De façon similaire, en considérant les équations (6) et (7) nous obtenons  $\dot{\beta}(t) = \dot{\beta}_1(t) + \dot{\beta}_2(t)$ . Le terme  $\dot{\beta}_1(t)$  provient de l'amortissement composé et on montre que  $\dot{\beta}_1(t) = 0$ . Le terme  $\dot{\beta}_2(t)$  provient de la raideur non linéaire et nous obtenons :

$$\dot{\beta}(t) = \dot{\beta}_2(t) = \frac{\eta_q}{2\pi \omega_n A(t)} \int_0^{2\pi} |A(t) \cos \varphi(t)|^q \text{sgn}(A(t) \cos \varphi(t)) \cos \varphi \, d\varphi \quad (10)$$

$$\dot{\beta}(t) = \frac{\eta_q A^{q-1}(t)}{2\omega_n} \left( 1 + (-1)^{q+1} \left[ \frac{\Gamma(q+2)}{2^{q+1} (\Gamma(q/2+3/2))^2} \right] \right) = r_q A(t)^{q-1} \quad (11)$$

avec  $r_q = \frac{\eta_q}{2\omega_n} \left( 1 + (-1)^{q+1} \left[ \frac{\Gamma(q+2)}{2^{q+1} (\Gamma(q/2+3/2))^2} \right] \right)$ . Les coefficients

$r_q$  dépendent des non linéarités en raideur et sont liés aux coefficients de raideur  $\eta_q$ . Nous pourrions grâce à cette relation caractériser, identifier et quantifier la raideur d'un oscillateur non linéaire en déterminant le couple  $(q, \eta_q)$ . La présence des non linéarités en amortissement n'influe pas sur la phase instantanée du signal obtenu.

La pulsation instantanée de l'oscillateur est :

$$\dot{\varphi}(t) = \omega_n + \dot{\beta}(t) = \omega_n + r_q A(t)^{q-1} \quad (12)$$

Cette équation présente la relation pulsation instantanée-amplitude instantanée d'un oscillateur non linéaire en raideur. Par exemple, en considérant le cas particulier d'un oscillateur de Duffing (raideur cubique,  $q=3$ ) nous obtenons  $\dot{\varphi}(t) =$

$$\omega_n + \frac{3\eta_3}{8\omega_n} A(t)^2, \text{ qui décrit les variations de la pulsation}$$

instantanée en fonction de l'amplitude instantanée de l'oscillateur.

En définitive, la présence de non linéarités en raideur n'a pas d'incidence sur l'amplitude instantanée de l'oscillateur, seul l'amortissement influe sur son amplitude (équation 9). La présence de non linéarités en amortissement (ou l'amortissement composé) n'influe pas sur la phase instantanée de l'oscillateur, seule la raideur influe sur la phase (équation 11). Notre but sera de déterminer les paramètres non linéaires d'un oscillateur en utilisant la T.O. du mouvement de cet oscillateur.

## 3. Analyse modale par la T.O.

### 3.1 Etude générale

Par rapport à la transformée de Fourier, l'idée de base de la transformée en ondelettes est de décomposer un signal  $x(t)$  selon une autre base que celle des sinusoides, chaque base d'ondelettes possédant des propriétés particulières qui guident son utilisation pour le type de problème posé. Le signal  $x(t)$  va donc être décomposé sur une famille de fonctions translatées et dilatées à partir d'une fonction unique  $\psi(t)$  appelée ondelette mère. La famille se met sous la forme [4,5]

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (13)$$

et est appelée ondelette analysante, avec  $a$  paramètre de dilatation ou paramètre d'échelle définissant la largeur de la fenêtre d'analyse. La variable  $a$  joue le rôle de l'inverse de la fréquence: plus  $a$  est faible moins l'ondelette analysante est étendue temporellement, donc plus la fréquence centrale de son spectre est élevée. Le paramètre  $b$  est le paramètre de translation localisant l'ondelette analysante dans le domaine temporel. Modifier  $a$  et  $b$  permet d'avoir des ondelettes à la fréquence voulue et à l'instant souhaité. En notant  $\psi^*(t)$  le conjugué de  $\psi(t)$ , la T.O. du signal  $x(t)$  est définie par :

$$(W_{\psi x})(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (14)$$

Cette analyse permet de décrire le contenu de  $x(t)$  localement au voisinage de  $(a, b)$  dans le plan temps-échelle. Elle nous indique l'importance relative de la fréquence  $1/a$  autour du point  $b$  (ou à l'instant  $b$ ) pour le signal  $x(t)$ . Ainsi, si  $x(t)$  vibre à une fréquence nettement moins élevée ou, au contraire, beaucoup plus élevée que  $1/a$ , le module du coefficient de la T.O. sera très petit et quasiment négligeable. Il ne devient conséquent que si le signal contient une composante de cette fréquence au point considéré. Les coefficients de la T.O. sont donc un moyen de repérer avec précision l'apparition d'une fréquence donnée à un instant donné dans un signal. Cette décomposition est fonction de deux variables  $a$  et  $b$  et évalue

la pertinence de l'utilisation de l'ondelette dans la description de  $x(t)$ . La T.O. est une représentation linéaire du signal, ceci implique que la T.O. de P signaux devient :

$$(W_{\Psi} \sum_{i=1}^P x_i)(a,b) = \sum_{i=1}^P (W_{\Psi} x_i)(a,b) \quad (15)$$

Cette propriété est pratique pour l'analyse de signaux multicomposantes.

L'ondelette choisie habituellement est l'ondelette de Morlet, définie par

$$\Psi(t) = e^{j 2 \pi f_0 t} e^{-t^2/2} \quad (16)$$

où  $f_0$  est la fréquence propre de l'ondelette. L'un des avantages de l'ondelette de Morlet est qu'elle est bien adaptée pour analyser toute sorte de signal vibratoire. La transformée de Fourier de cette fonction dilatée est

$$\Psi(af) = \sqrt{2 \pi} e^{-2 \pi^2 (af - f_0)^2} \quad (17)$$

et atteint son maximum lorsque le paramètre de dilatation est égal à  $a = f_0/f$ . Connaissant  $f_0$  et ayant trouvé une fréquence propre du signal à étudier nous pourrions utiliser cette relation pour déduire le paramètre de dilatation. L'ondelette de Morlet dilatée est un filtre passe-bande de fréquence centrale  $f_c = f_0/a$  dont la largeur est proportionnelle à  $1/a$ . Il faut noter que si la fréquence analysée est importante, le paramètre de dilatation devient faible et la fenêtre fréquentielle de la fonction analysante large. Dans cette étude une autre ondelette, appelée ondelette de Morlet modifiée, sera utilisée. Elle se met sous la forme

$$\Psi(t) = e^{j 2 \pi f_0 t} e^{-t^2/N} \quad (18)$$

avec  $N > 0$ , dont la transformée de Fourier dilatée est

$$\Psi(af) = \sqrt{N \pi} e^{-N \pi^2 (af - f_0)^2} \quad (19)$$

Lorsque  $N$  croît la résolution fréquentielle augmente au détriment de la résolution temporelle. Il y a une valeur optimale de  $N$  donnant la meilleure résolution temps-fréquence, pour un signal  $x(t)$  donné et analysé avec l'ondelette de Morlet modifiée. Cette valeur est déterminée en utilisant un critère relatif à la dispersion des coefficients de la transformée en ondelettes. La mesure de cette dispersion s'effectue au sens de l'entropie de Shannon et la technique a été développée en [2].

### 3.2 Extraction de l'arête de la T.O. et identification des non linéarités

Soit  $x(t) = A(t) \cos(\varphi(t))$  un signal modulé en amplitude et en phase qui est en réalité le déplacement de l'oscillateur non linéaire. La T.O. de  $x(t)$  est

$$(W_{\Psi} x)(a,b) = (1/2) \sqrt{a} A(b) \Psi^*(a \dot{\varphi}(b)) e^{j \varphi(b)} \quad (20)$$

avec  $\dot{\varphi}(b) = d\varphi/db$  la pulsation instantanée de  $x(t)$ . Le paramètre de dilatation est déterminé aux points d'énergie maximale, c'est à dire lorsque le module de la T.O. est maximum. On obtient alors l'arête de T.O. [4,5]. En considérant l'ondelette de Morlet modifiée, nous avons sur

l'arête  $\Psi(a \dot{\varphi}(b))$  qui est maximum et les valeurs du paramètre d'échelle vérifient :

$$a = a(b) = \omega_0 / \dot{\varphi}(b) \quad (21)$$

L'équation (20) se réduit alors à :

$$(W_{\Psi} x)(a(b),b) = (1/2) \sqrt{N \pi a(b)} A(b) e^{j \varphi(b)} \quad (22)$$

dont le module est proportionnel à l'amplitude du signal (ou du déplacement)  $x(t)$  à analyser et dont l'argument correspond à la phase du signal. Nous avons donc :

$$A(b) = 2 |(W_{\Psi} x)(a(b),b)| / \sqrt{N \pi a(b)} \quad (23)$$

$$\varphi(b) = \text{Arg}[(W_{\Psi} x)(a(b),b)] \quad (24)$$

A partir de ces relations nous obtenons  $\dot{A}(b)$  et  $\dot{\varphi}(b) = \dot{\varphi}(b) - \omega_n$  qui sont utilisés dans les équations (9) et (11) pour caractériser et identifier les non-linéarités.

Pour un signal à plusieurs composantes, la linéarité de la transformée en ondelettes permet de séparer les modes. Ayant effectué une bonne localisation en temps et en échelle des divers modes, grâce à l'ondelette analysante de Morlet modifiée, on détermine pour chaque  $i^{\text{ème}}$  mode l'amplitude  $A_i(b)$ , la phase  $\varphi_i(b)$ , leurs dérivées et par la suite les paramètres modaux relatifs à chaque mode.

D'après l'équation (22) nous avons :

$$A(b) \cos \varphi(b) = \frac{2}{\sqrt{N \pi a(b)}} \text{Re}(W_{\Psi} x)(a(b),b) \quad (25)$$

par conséquent, en considérant la partie réelle du squelette de la transformée en ondelettes nous pouvons reconstituer le signal ou le déplacement  $x(t)$  en utilisant la relation précédente.

## 4 Applications

### 4.1 Oscillateur à amortissement composé et à raideur cubique

On considère l'oscillateur à amortissement composé (visqueux + carré) et à raideur cubique. Il est régi par l'équation différentielle :

$$\ddot{x}(t) + 0.45\dot{x}(t) + 0.12x(t)|\dot{x}(t)| + 400x(t) + 500x^3(t) = 0 \quad (26)$$

La réponse libre  $x(t)$  est obtenue numériquement par l'algorithme de Runge-Kutta, sur une durée de 14,5 secondes avec les conditions initiales :  $x(t) = 0,5$  m et  $\dot{x}(t) = 0$  m/s. Nous appliquons la transformée en ondelettes à cette réponse temporelle. La Figure 1 montre l'amplitude de la transformée en ondelettes ainsi que son arête et la réponse temporelle théorique et reconstituée.

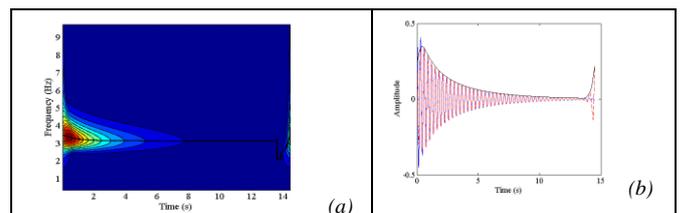


Figure 1. (a) Amplitude de la T.O. et son arête ;(b) Réponse temporelle théorique et reconstituée

A partir de l'arête nous déterminons le squelette de la T.O. qui est utilisé pour reconstituer le signal et son enveloppe  $A(t)$ . La figure 2 montre les variations de l'amplitude  $A(t)$  en fonction de fréquence instantanée et les variations de la dérivée de l'amplitude  $\dot{A}(t)$  en fonction de l'amplitude  $A(t)$ . La pulsation  $\omega_n$  de l'oscillateur est obtenue en considérant  $A(t)=0$  dans la Figure 2(a).

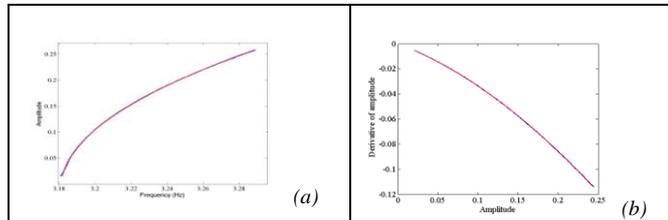


Figure 2. (a) Variations de l'amplitude en fonction de la fréquence ; (b) Variations de la dérivée de l'amplitude en fonction de l'amplitude

Le coefficient de raideur  $\eta_3$  est obtenu par régression linéaire de l'équation  $\dot{\beta}(t) = A(t)^2(3\eta_3/8\omega_n)$ . En traçant les variations de  $\dot{A}(t)$  en fonction de  $A(t)$  on obtient la parabole représentée dans la figure 2 (b). On effectue une interpolation polynomiale au sens des moindres carrés de cette parabole. Le degré obtenu est deux, ce qui est en concordance avec l'amortissement composé étudié, puisque d'après (8) et (9) nous obtenons :  $\dot{A}(t) = -\frac{\mu_1}{2}A(t) - \frac{4\omega_n\mu_2}{3\pi}A(t)^2$ . Les coefficients de ce polynôme nous permettent d'identifier les deux coefficients d'amortissement. Le tableau 1 montre les résultats de l'identification en utilisant la T.O.

Paramètres	Valeurs exactes	Valeurs identifiées	Erreur (%)
$\mu_1$ (s <sup>-1</sup> )	0,45	0,473	5,1
$\mu_2$ (m <sup>-1</sup> )	0,12	0,118	1,7
$\omega_n$ (rad/s)	20	20,01	0,05
$\eta_3$ (m.s) <sup>-2</sup>	500	500,4	0,07

Tableau 1. Paramètres exacts et identifiés de l'oscillateur à 1 d.d.l.

#### 4.2 Essais expérimentaux

Les essais sont réalisés au Département de Mécanique Appliquée à Besançon. La structure testée est une poutre encastrée-libre sur laquelle on génère des non-linéarités en amortissement et raideur par l'intermédiaire de contre-réactions comme l'indique la Figure 3. On enregistre alors la réponse libre du système. Trois essais ont été effectués en appliquant une non-linéarité de type raideur cubique ayant des amplitudes différentes. Ceci conduit à des raideurs cubiques de type 'faible', 'moyenne' et 'forte'. La figure 3 nous montre la réponse temporelle en considérant une raideur cubique de type "moyenne". Nous appliquerons la T.O. à cette réponse temporelle et effectuerons par suite l'identification des non linéarités. La figure 4 (a) nous montre les résultats obtenus en considérant une raideur cubique de type "moyenne". La parabole de cette figure montre que la non linéarité en raideur

est de type cubique ressort 'raide'. La fréquence tend vers la fréquence propre du système linéaire lorsque l'amplitude tend vers zéro.

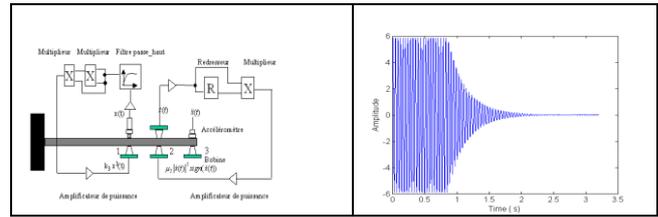


Figure 3. Montage expérimental et réponse temporelle

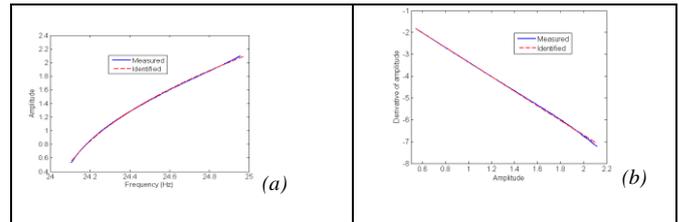


Figure 4. (a) Variations de l'amplitude en fonction de la fréquence ; (b) Variations de la dérivée de l'amplitude en fonction de l'amplitude

La figure 4 (b) nous montre les variations de la dérivée de l'amplitude en fonction de l'amplitude. C'est grâce à elle que nous obtenons les coefficients d'amortissement du système. Ici, on trouve une droite qui passe par l'origine, par conséquent l'amortissement est de type visqueux. La détermination de la pente de la droite nous permet d'obtenir la valeur du coefficient d'amortissement normalisé à la masse. Les paramètres identifiés lors des trois essais sont indiqués dans le tableau 2.

Essai	$\mu_1$ (s <sup>-1</sup> )	$f_n$ (Hz)	$\eta_3$ (m.s) <sup>-2</sup>
raideur 'faible'	7,073	24,10	224,813
raideur 'moyenne'	6,841	24,08	490,553
raideur 'forte'	6,969	23,97	1148,7

Tableau 2. Résultats d'identification par T.O.

#### 5 Conclusion

Une méthode utilisant la T.O. avec une nouvelle ondelette analysante a été présentée pour caractériser, identifier et quantifier les faibles non linéarités dans les oscillateurs. Des tests numériques et expérimentaux montrent l'efficacité de la méthode. Elle va être étendue au cas de systèmes non linéaires à plusieurs degrés de liberté.

#### Références

[1] J. Lardiès, M.N. Ta, M. Berthillier, Modal parameter estimation from output-only data using the wavelet transform, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 73, pp. 718-733; 2004  
 [2] J. Lardiès, Identification des paramètres modaux de câbles en vibration par la transformée en ondelettes, *Colloque GRETSI 2009*, Dijon  
 [3] N. Bogolioubov et I. Mitropolski, *Les méthodes asymptotiques en théorie des oscillations non linéaires*. Gauthier-Villars Edition, 1962.  
 [4] B. Torrèsani, *Analyse continue par ondelettes*, Editions du CNRS, Paris, 1995  
 [5] S. Mallat, *Une exploration des signaux en ondelettes*, Editions de l'école Polytechnique, 2000