

Identification expérimentale et recalage d'une structure en présence d'une non-linéarité locale

A. HOT^a, G. KERSCHEN^b, S. COGAN^a, E. FOLTETE^a,

a. *Institut FEMTO-ST, Département Mécanique Appliquée, 24 rue de l'Épitaphe, 25000 BESANCON*

b. *Department of Aerospace and Mechanical Engineering, University of Liège, Chemin des Chevreuils 1 (B52), 4000 LIEGE (BELGIUM)*

Résumé :

Ce papier propose une étude vibratoire de la poutre COST-F3 présentant une non-linéarité locale de type géométrique. À partir de mesures temporelles et fréquentielles, les trois phases d'une identification expérimentale d'un comportement non-linéaire sont abordées : la détection, la caractérisation et l'estimation du paramètre non-linéaire. Une modélisation éléments finis de la poutre est également proposée afin de permettre un recalage du paramètre non-linéaire par la méthode hybride de balance multi-harmonique couplée à l'erreur en relation de comportement.

Abstract :

This paper studies of the COST-F3 beam experimental benchmark that exhibits a local geometric non-linear behavior. The whole identification process, i.e. the non-linear behaviour detection, characterisation and the parameter estimation, is carried out using measured time and frequency responses. A finite element model is also built in order to update the non-linear parameter using the hybrid multi-harmonic balance extended constitutive relation error method.

Mots clefs : non-linéaire, identification, recalage

1 Introduction

Lors de la phase de conception de systèmes mécaniques, le comportement dynamique des structures doit généralement être pris en compte pour s'assurer de leur performance et fiabilité. Des essais vibratoires et des simulations numériques sont donc mis en œuvre puis comparés et des techniques validation de modèles ont été développées pour aider les ingénieurs à améliorer la qualité de leur modèles numériques. Cependant, ces techniques sont généralement limitées aux systèmes linéaires, ce qui nécessite le développement de nouvelles méthodologies non-linéaires. L'identification de systèmes non-linéaires fait partie intégrante de cette phase de validation et peut être décomposée en trois parties. Premièrement, l'étape de détection consiste à chercher des preuves de comportement non-linéaires. Ensuite, la caractérisation détermine le type de non-linéarité. Enfin, la dernière étape consiste en l'estimation du paramètre non-linéaire. Les références [1] et [2] donnent un aperçu des principales méthodes d'identification. Un autre moyen d'estimer la valeur du paramètre non-linéaire est de procéder par recalage numérique. Une étude comparative de quatre méthodes existantes est proposée dans [3] et montre qu'elles sont généralement basées sur une linéarisation se limitant ainsi aux faibles non-linéarités. Ainsi on se propose d'utiliser ici la nouvelle méthodologie hybride développée par Isasa et al. dans [4] basée sur la balance multi-harmonique couplée à l'erreur en relation de comportement.

Cette étude est réalisée sur la structure COST-F3 [5]. Elle est composée d'une poutre principale et d'une fine lamelle. Cette lamelle entre en grands déplacements au fur et à mesure que le niveau d'excitation augmente, ce qui entraîne un comportement non-linéaire. Les accélérations sont relevées aux points 1 à 7, voir Figure 1, le déplacement est mesuré au point 7 et l'excitation se fait au point 2.

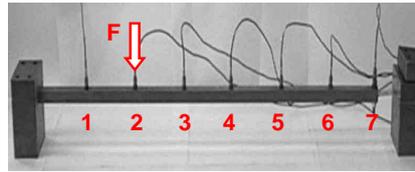


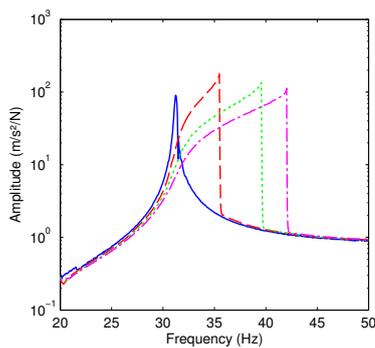
FIG. 1 – Poutre COST-F3

Le but de cette étude est d'identifier entièrement le comportement non-linéaire et de comparer les valeurs des paramètres non-linéaires obtenues par identification expérimentale et recalage numérique.

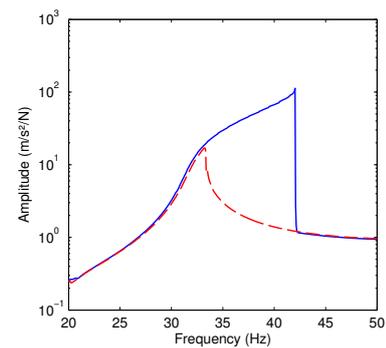
2 Identification expérimentale

2.1 Détection

La méthode la plus couramment utilisée pour détecter un comportement non-linéaire est le test d'homogénéité qui exploite les mesures fréquentielles. Cette méthode consiste à détecter des changements des Fonctions de Réponse en Fréquence (FRF) lorsque le niveau d'excitation augmente, ce qui révèle une source de non-linéarité sur la structure. La Figure 2(a) représente la FRF de la poutre autour de son premier mode de flexion, sous une excitation de type sinus pas à pas. On constate aisément une distorsion des FRF et un phénomène de saut d'autant plus importants que le niveau d'excitation augmente. Une autre caractéristique des systèmes non-linéaires est leur comportement différent selon le sens du balayage sinus. Ceci est illustré Figure 2(b). Ces deux observations aident aussi à la détermination du type de non-linéarité : elles sont caractéristiques d'un effet de raideur rigidifiante.



(a) Phénomènes de sauts pour des sinus montant de niveaux — 0.23 N, - - - 2.26 N,
 ···· 4.52 N, - · - · 6.78 N.



(b) Différentes réponses pour — un sinus montant et - - - un sinus descendant d'amplitude 6.78 N.

FIG. 2 – Réponses fréquentielles à une excitation sinus pas à pas

Dans le domaine temporel, la présence de sous- ou super-harmoniques dans la réponse d'une structure excitée par une force sinusoïdale mono-harmonique est une preuve d'un comportement non-linéaire. Les Figures 3(a) et 3(b) illustrent la réponse de la poutre à une excitation sinusoïdale de respectivement 34 Hz et 40 Hz. L'effet des harmoniques est clairement visible sur la forme des réponses du système. Ceci est d'autant plus visible à 40 Hz puisque le niveau de réponse est plus haut, voir Figure 2(a), ce qui entraîne un effet non-linéaire plus important.

2.2 Caractérisation

Masri et al. dans [6] ont proposé une méthode efficace et fiable de caractérisation de systèmes non-linéaires. Cette méthode appelée *Restoring Force Surface* (RFS) présente l'avantage de ne nécessiter aucune connaissance a priori du type de non-linéarité.

Le principe de cette méthode consiste à examiner l'allure des efforts internes. En effet, prenons l'exemple d'un système à un degré de liberté, son équation de mouvement peut être écrite sous la forme :

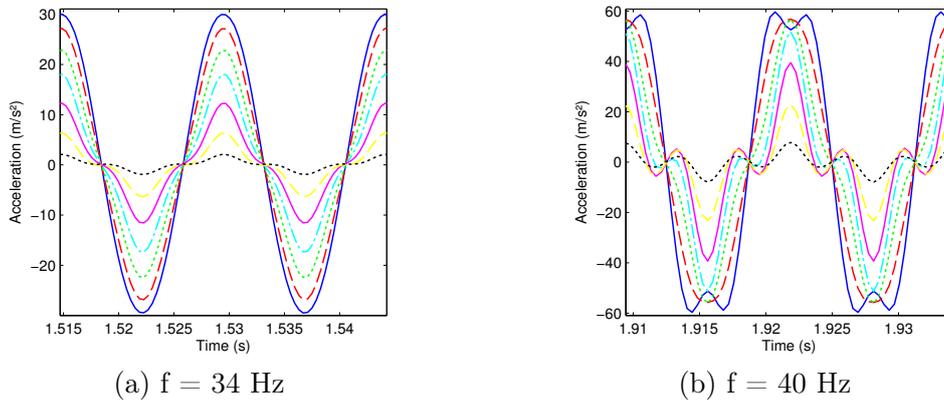


FIG. 3 – Réponses temporelles à une excitation sinus d'amplitude 6.78 N aux nœuds
 \cdots 1, $-\cdot-$ 2, $-$ 3, $- \cdot -$ 4, $\cdot \cdot \cdot$ 5, $- - -$ 6, $-$ 7.

$$m\ddot{x} + f_{int} = m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + f_{nl}(x, \dot{x}) = p \quad (1)$$

et en supposant que la masse m , l'accélération \ddot{x} et l'effort appliqué p sont trois quantités mesurées, alors l'effort interne f_{int} peut être directement déterminé. Cet effort est une composition d'un effort d'amortissement linéaire $c\dot{x}$, d'un effort de raideur linéaire kx et d'un effort non-linéaire $f_{nl}(x, \dot{x})$.

Cette procédure est ici appliquée à la poutre COST-F3. Les réponses temporelles sont obtenues sous excitation sinus balayé autour du premier mode, celui présentant le comportement non-linéaire le plus important. La vitesse en bout de poutre est obtenue par intégration de l'accélération. La Figure 4(a) trace l'accélération, proportionnelle aux efforts internes, en fonction de la vitesse et du déplacement. La partie précédente laissant supposer la présence d'une non-linéarité en raideur, seuls des efforts de raideurs sont conservés en recherchant les points de réponse à vitesse nulle.

Ces efforts mesurés sont tracés Figure 4(b) et sont ensuite lissés par un polynôme de degré 5 : $\ddot{x} = \sum_{n=1}^5 P_n x^n$. Afin de déterminer les composantes les plus importantes du polynôme obtenu, un facteur d'importance I_n est calculé (2). Il se base sur la variance σ_n^2 de chaque terme du polynôme et celle σ_x^2 du polynôme complet. Ainsi, de par la forme des efforts internes et les valeurs du facteur d'importance données au Tableau 1, il est possible de montrer qu'en plus de la partie linéaire, une composante non-linéaire cubique est présente dans les efforts de raideur interne.

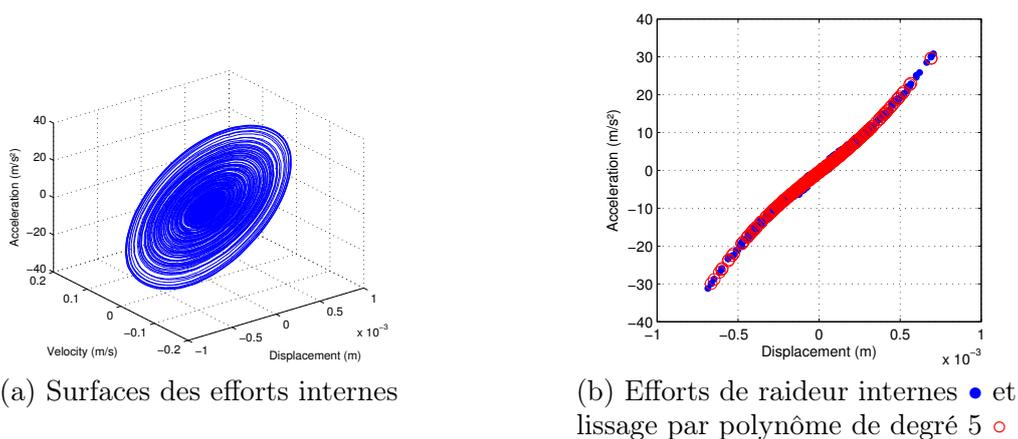


FIG. 4 – Visualisation des efforts internes pour une excitation d'amplitude 1.25 NRMS

$$I_n = 100 \frac{\sigma_n^2}{\sigma_x^2} \quad (2)$$

n	5	4	3	2	1	0
P_n	-1.9e16	-2.4e12	3.1e10	3.7e5	3.3e4	-0.4
I_n	0.23	8.9e-3	4.18	1.5e-3	74.47	0

TAB. 1 – Résultats du lissage polynomial et facteur d'importance.

2.3 Estimation du paramètre

La méthode retenue dans cette étude pour l'estimation du paramètre non-linéaire est celle proposée et détaillée par Richards et Singh dans [7] et appelée *Conditionned Reverse Path* (CRP).

L'avantage de cette méthode spectrale est de pouvoir extraire le comportement linéaire sous-jacent de la structure sans perturbation des non-linéarités. En effet, en dynamique linéaire, les FRF entre le déplacement X et l'effort injecté F peuvent être calculées via les estimateurs H_1 et H_2 , mais elles sont alors sujettes aux distorsions dues aux non-linéarités. Richards et Singh proposent alors deux nouveaux estimateurs notés H_{c1} et H_{c2} qui donnent une FRF linéaire sans influence des non-linéarités. Voici l'expression de l'estimateur H_{c2} :

$$H_{c2} : H(\omega)^T = G_{XF(-1)}(\omega)G_{XX(-1)}(\omega) \quad (3)$$

où G est la matrice de densité spectrale de puissance et où les indices (-1) indiquent les composantes décorréélées des effets non-linéaires. Le coefficient non-linéaire A est ensuite identifié dans une seconde étape :

$$A^T(\omega) = G_{Y^{-1}}^{-1}(\omega)G_{YF}(\omega) - G_{YX}(\omega)B(\omega)^T \quad (4)$$

où B est la matrice de raideur dynamique linéaire. Le coefficient ainsi obtenu est complexe et dépend de la fréquence. La valeur finale retenue est donc une moyenne de $A(\omega)$. Il faut également vérifier que $\Re(A) \gg \Im(A)$ pour que le paramètre non-linéaire garde une signification physique.

La Figure 5 présente les résultats de l'identification du système linéaire sous-jacent et celle du paramètre non-linéaire. La Figure 5(a) trace les FRF construites à partir des estimateurs H_{c2} et H_2 . On peut aisément remarquer que plus le niveau d'excitation augmente, plus les FRF calculées par H_2 sont affectées et s'écartent de la FRF linéaire de référence calculée par H_{c2} . La Figure 5(b) représente la partie réelle du coefficient non-linéaire identifié pour une excitation de 1.82 NRMS. Plusieurs niveaux d'excitation ont été testés et leurs résultats sont donnés au Tableau 2. Le coefficient γ_M^2 est la cohérence cumulée [7] dont une valeur proche de 1 est le signe d'une bonne identification. La valeur du paramètre non-linéaire identifié retenue est celle obtenue à 1.82 NRMS : $1.07e10N/m^3$. En effet, ce résultat présente la plus haute valeur de γ_M^2 et un rapport $\Re(A)/\Im(A)$ important.

Niveau d'excitation (NRMS)	A (N/m^3)	γ_M^2
1.82	1.07e10 + i 4.49e7	0.99448
3.62	1.02e10 + i 1.08e8	0.99029
6.34	9.90e9 + i 8.42e7	0.98597

TAB. 2 – Paramètre non-linéaire identifié et cohérence cumulée

3 Recalage numérique

Contrairement à la méthode CRP, qui ne nécessite que des mesures expérimentales pour estimer le paramètre non-linéaire, la méthode hybride de balance multi-harmonique couplée à l'erreur en relation de comportement, que l'on notera MHB-ECRE, est une méthode de recalage qui nécessite un modèle numérique de la structure.

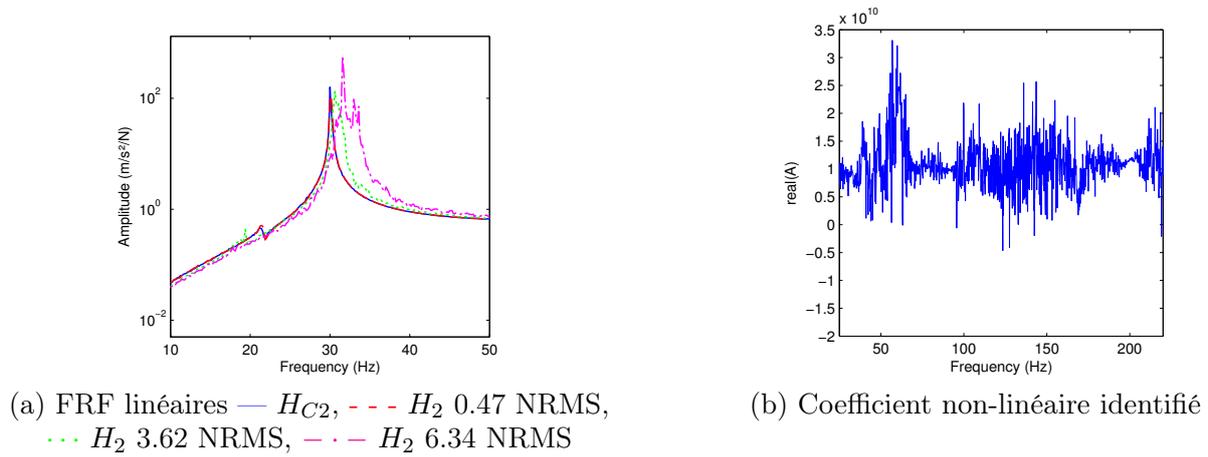


FIG. 5 – Résultats de l'identification linéaire et non-linéaire

3.1 Modélisation et recalage linéaire

Un modèle numérique de la poutre COST-F3 est construit par la méthode des éléments finis. Il se compose d'éléments poutre, de masses ponctuelles et de ressorts de torsion pour la modélisation des encastremets non parfaits. Afin de caractériser expérimentalement la partie linéaire sous-jacente de la structure, une excitation aléatoire bas niveau a été utilisée. Les trois premiers modes de flexion ont été identifiés par lissage des FRF dans la bande $[0 - 500]$ Hz. Les fréquences propres et vecteurs propres de ces trois modes ont servi de cible pour le recalage du modèle numérique linéaire.

Pour les 3 modes, le résultat de la corrélation du modèle numérique recalé avec les résultats de mesure donnent une erreur maximum de 0.7 % sur les fréquences propres et une corrélation des vecteurs propres quantifiée par le critère de MAC supérieure à 99.5 %. Cette bonne corrélation constitue un point de départ favorable pour le recalage du modèle non-linéaire.

3.2 Recalage non-linéaire

Afin d'introduire le comportement non-linéaire, un ressort cubique de paramètre k_{nl} est ajouté entre le point 7 et le bâti. La méthode de recalage de non-linéarités locales MHB-ECRE [4] est utilisée pour déterminer la valeur de ce paramètre. Cette méthode suppose que si l'excitation est harmonique alors la réponse l'est également. Au lieu d'exprimer le mouvement avec le paramètre de déplacement X classique, on l'exprime ici en fonction de la variable \mathcal{Q} . Ce vecteur contient les coefficients (statique, cosinus, sinus) de la décomposition en série de Fourier du déplacement et est de taille $(2n + 1)N$ où N est le nombre de degrés de liberté du modèle et n le nombre d'harmoniques pris en compte.

L'expression de l'erreur E_ω^2 que l'on cherche à minimiser lors du recalage est exprimée à l'équation (5) où le premier terme est une énergie résiduelle dans les éléments linéaires, le second est celle dans le ressort non-linéaire et le troisième est une mesure de l'erreur faite sur les mesures. Les coefficients γ et α servent de pondération entre ces quantités.

$$E_\omega^2 = \gamma r_\omega^T \mathcal{K} r_\omega + (1 - \gamma) r_\omega^T \mathcal{F} r_\omega + \alpha (H \mathcal{Q}_\omega - \mathcal{Q}_\omega^e)^T \mathcal{K}_R (H \mathcal{Q}_\omega - \mathcal{Q}_\omega^e) \quad (5)$$

Trois vecteurs expérimentaux \mathcal{Q}_ω^e ont été identifiés par lissage des déplacements temporels obtenus par trois excitations sinus d'amplitude 6.78 N et de fréquence 36 Hz, 38 Hz et 40 Hz. Ces réponses ont été choisies autour du premier mode en raison des forts comportements non-linéaires dans cette bande de fréquence. De plus, pour une excitation identique, les modes suivants demeurent linéaires.

La Figure 6 trace l'évolution de l'erreur E_ω^2 en fonction du paramètre k_{nl} pour les trois réponses. Le paramètre identifié, celui correspondant au minimum de la fonction E_ω^2 , n'est pas le même selon la fréquence choisie : il varie de $7.9e9N/m^3$ (36 Hz) à $1.18e9N/m^3$ (40 Hz). On peut d'abord remarquer que la valeur identifiée expérimentalement par la CRP ($1.07e10N/m^3$) est comprise dans cet intervalle.

Ensuite, une étude, portant sur les différentes erreurs de modélisation de la partie linéaire et leur influence sur les résultats du recalage, montre qu'il faut choisir la réponse ayant la plus forte amplitude afin que l'effet non-linéaire émerge suffisamment. Ainsi, la valeur retenue dans cette étape de recalage est celle obtenue à 40 Hz : $k_{nl} = 1.18e9N/m^3$.

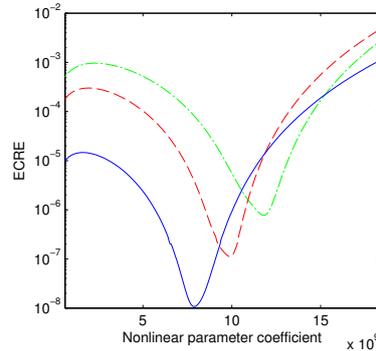


FIG. 6 – Résultats du recalage non-linéaire MHB-ECRE à — 36 Hz, - - - 38 Hz et - . - 40 Hz

4 Conclusions

L'objectif de cette étude était de mettre en application la phase complète d'identification de la poutre COST-F3. Ainsi, des effets non-linéaires importants ont été détectés dans les domaines temporel et fréquentiel. La méthode RFS a mis en évidence un comportement non-linéaire de type cubique dont le paramètre a été identifié par la méthode CRP. Dans une seconde étape un modèle élément fini linéaire puis non-linéaire de la poutre a été construit. Une première validation expérimentale du modèle linéaire a servi de base au recalage non-linéaire. La valeur du paramètre obtenue par recalage s'est révélée proche de celle obtenue par identification expérimentale. Ceci démontre l'aptitude de la nouvelle méthode MHB-ECRE au recalage de modèles localement non-linéaires. Ces deux approches s'avèrent donc complémentaires et donnent une meilleure confiance dans la modélisation non-linéaire choisie.

Remerciements

Ces travaux sont financés par le Centre National des Etudes Spatiales (Toulouse, France) et Thales Alenia Space (Cannes La Bocca, France). Les auteurs remercient F. Buffe, J. Buffe et S. Behar pour les discussions constructives sur la dynamique des structures spatiales.

Références

- [1] G. Kerschen, K. Worden, A. F. Vakakis, J.C. Golinval, *Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics*, Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 20, No. 3, pp. 505-592 (2006).
- [2] K. Worden, G.R. Tomlinson, *Nonlinearity in Structural Dynamics : Detection, Identification, and Modeling*, Institute of Physics Publishing (IoP), Bristol and Philadelphia (2001).
- [3] I. Isasa Gabilondo, *Model validation applied to locally nonlinear lift structures*, PhD Thesis, Mondragon Unibertsitatea, Spain (2009).
- [4] I. Isasa, A. Hot, S. Cogan, E. Sadoulet-Reboul, *Model updating of locally nonlinear systems based on Multi-harmonic Extended Constitutive Relation Error*, Proc. of the International Conference on Noise and Vibration Engineering ISMA, Leuven, Belgium (2010).
- [5] F. Thouverez, *Presentation of the ECL Benchmark*, Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 17, No. 1, pp. 195-202 (2003).
- [6] S.F. Masri, T.K. Caughey, *A nonparametric identification technique for nonlinear dynamic problems*, Journal of Applied Mechanics, Vol. 46, pp. 433-447 (1979).
- [7] C.M. Richards, R. Singh, *Identification of multi-degree-of-freedom non-linear systems under random excitations by the "Reverse Path" spectral method*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 213, No. 4, pp. 673-708 (1998).