

# Localisation de sources sonores par représentation parcimonieuse

H. MA, J. LARDIES, M. BERTHILLIER

*Institut FEMTO-ST ; Département de Mécanique Appliquée, rue de l'Épitaphe, BESANCON  
joseph.lardies@univ-fcomte.fr*

## Résumé :

*Le problème considéré est celui de la localisation de sources ponctuelles qui seront corrélées ou non corrélées, à large bande ou à bande étroite, en champ proche ou en champ lointain. Pour localiser ces sources nous utilisons une antenne acoustique. La méthode proposée est basée sur une représentation parcimonieuse des données temporelles provenant des microphones formant l'antenne et l'estimation de la position des sources consiste à réaliser un compromis entre la quantité d'une erreur résiduelle et la parcimonie des coefficients de décomposition. Des exemples de simulation et des tests en chambre anéchoïque sont présentés montrant les performances de l'algorithme proposé. Cet algorithme sera comparé aux algorithmes traditionnels tels que beamforming, Capon et MUSIC.*

## Abstract :

*The source localization problem by an acoustical array is considered in this communication. The sources will be correlated or uncorrelated, wideband or narrowband, in nearfield or farfield. The method is based on a sparse representation of microphone measurements with an overcomplete basis composed of time samples from the acoustical array and the source position estimation is obtained by a compromise between a residual error and the sparsity coefficients. Numerical and experimental results in an anechoic room are presented. Our algorithm is compared to traditional algorithms such as beamforming, Capon and MUSIC.*

**Mots clefs :** antenne acoustique, localisation, parcimonie, résolution spatiale

## 1 Introduction

L'évolution des traitements d'antenne peut être découpée en trois étapes. La première est la formation de voies conventionnelle [1] (ou beamforming) dont le principe consiste à réaliser un balayage mécanique ou électronique de l'espace par le réseau de capteurs. Le balayage mécanique consiste simplement à effectuer mécaniquement des rotations de l'antenne autour de son axe et la position de la source est obtenue lorsque le maximum d'énergie acoustique est observé. Le balayage électronique consiste à compenser le retard des ondes sur les capteurs dans le but d'orienter électroniquement l'antenne dans une direction de pointage et pouvoir inspecter le champ de vision. La deuxième étape dans le traitement d'antenne a été initiée dans les années 1970 afin de trouver un meilleur pouvoir de résolution que les antennes conventionnelles et ont conduit au traitement adaptatif d'antenne [2] dont le plus connu est le traitement de Capon. Ce traitement ne s'appuie pas sur une meilleure modélisation du milieu que celle utilisée par la formation de voies conventionnelle, mais sur un critère de performance plus efficace. Son principe consiste à chercher un filtre spatial qui minimise les contributions de l'énergie incidente qui ne sont pas présentes dans la direction scrutée. C'est une méthode qui ne fait aucune hypothèse sur les propriétés statistiques des données temporelles et sa résolution spatiale est limitée par l'ouverture de l'antenne, par la corrélation des sources et par le rapport signal sur bruit. Par la suite, afin d'améliorer la résolution spatiale, de nouvelles méthodes paramétriques dites à haute résolution [3-6] ont été introduites et constituent la troisième étape dans le traitement d'antenne. Ces méthodes, dont la plus connue est MUSIC [3], sont basées sur l'exploitation d'un modèle reliant le front d'onde incident aux paramètres caractérisant les sources et exploitent les statistiques à

l'ordre deux des données temporelles provenant des microphones. L'idée de base est le partage de l'espace d'observation en deux sous espaces complémentaires: le sous espace signal et le sous espace bruit et d'utiliser la propriété d'orthogonalité entre ces deux sous espaces pour localiser les sources sonores. Cependant ces méthodes à haute résolution sont limitées par le nombre d'échantillons à traiter, la corrélation des sources et le rapport signal sur bruit (RSB). Il importe donc de remédier à ces problèmes, ce qui est l'objet de cette communication. Nous allons formuler le problème dans un cadre variationnel où nous allons minimiser une fonction objective régularisée pour estimer la puissance des signaux issus des microphones en fonction du gisement des sources, ou bien en fonction de la distance sources-capteurs. Une représentation parcimonieuse spatiale des données temporelles provenant des capteurs va être utilisée. Dans cette représentation un premier terme va quantifier l'erreur entre un modèle donné et les observations et un second terme va favoriser les modèles parcimonieux. Il faut noter que les variables étant complexes, l'optimisation n'est plus à caractère quadratique et le problème sera formulé à travers un programme conique du second ordre [7-10]. Des simulations et des résultats expérimentaux en chambre anéchoïque montrent l'efficacité de la méthode sur la localisation de sources sonores.

## 2 Modélisation usuelle en traitement d'antenne et position du problème

Les techniques de traitement d'antenne pour la localisation des sources ponctuelles rayonnantes sont basées sur l'exploitation d'un modèle reliant le front d'onde incident aux paramètres caractérisant les sources. Ainsi, si on considère une antenne acoustique formée de  $N$  capteurs et placée dans un milieu comprenant  $P$  sources ponctuelles, le signal observé à la sortie des capteurs s'écrit de manière générale [3-6] :

$$y(t) = A(\theta) s(t) + b(t) = \sum_{i=1}^P a(\theta_i) s_i(t) + b(t) \quad ; \quad t = \{1, 2, \dots, T\} \quad (1)$$

où  $y(t)$  représente l'observation, c'est-à-dire le vecteur issu des différentes mesures du réseau de capteurs que l'on souhaite exploiter ;  $A(\theta) = [a(\theta_1), a(\theta_2), \dots, a(\theta_P)]$  de dimension  $(N \times P)$  représente la matrice de transfert, caractéristique du modèle de propagation. Elle relie l'expression du signal source à l'observation en fonction des vecteurs paramétrés :  $a(\theta_1), a(\theta_2), \dots, a(\theta_P)$  appelés vecteurs directionnels. En champ lointain ces vecteurs directionnels dépendent des gisements des sources que nous souhaitons estimer. En champ proche (dans le cas d'ondes sphériques) ils dépendent des distances et des gisements des sources. C'est cette matrice  $A(\theta)$  qui contient toute l'information sur la position des sources, et même sur la fréquence des signaux émis, et c'est donc sur cette matrice que vont principalement se distinguer les différents scénarios de localisation des sources rayonnantes. On notera  $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_P]^T$  le vecteur contenant les paramètres (les positions) des sources. Le vecteur  $s(t)$  est le vecteur des amplitudes complexes des signaux émis par les  $P$  sources et  $b(t)$  est le bruit de mesure apparaissant sur chaque capteur. L'estimation des paramètres  $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_P\}$  des sources est un problème non-linéaire et ces paramètres sont incorporés dans la matrice de transfert  $A(\theta)$  qui est inconnue. A partir de la connaissance de  $y(t)$  on se propose d'estimer les paramètres  $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_P\}$  lorsque les sources sont corrélées ou non corrélées, à bande étroite ou à large bande, en champ proche ou en champ lointain.

## 3 Représentation parcimonieuse spatiale

### 3.1 Présentation du problème de parcimonie et solution parcimonieuse

Par définition, une représentation est dite parcimonieuse lorsque la plupart de ses coefficients sont nuls, ou "approximativement" nuls. Le principe d'une représentation parcimonieuse repose sur l'hypothèse qu'un ensemble d'observations (dans notre cas la série temporelle  $y(t)$ ) peut être décrit par un nombre très réduit de paramètres définis dans un espace de représentation adéquat. On cherche alors à approximer les données par une combinaison linéaire d'un faible nombre d'éléments (appelés atomes) pris dans un dictionnaire donné. L'ensemble des éléments du dictionnaire définit alors le domaine de représentation et une combinaison à faible nombre d'éléments constitue une représentation parcimonieuse des données. Le but est donc de représenter l'observation  $y(t)$  par une combinaison linéaire du plus petit nombre d'atomes. L'approche classique de ce problème consiste à minimiser un critère quadratique d'attache aux données, pénalisé par un terme de norme  $l_1$  qui va favoriser les solutions parcimonieuses.

Le problème d'estimation paramétrique indiqué par la relation (1) va donc être transformé en un problème de représentation parcimonieuse des sources. Pour cela nous introduisons une représentation redondante de la

matrice de transfert  $A$ . Celle-ci sert de dictionnaire redondant en termes de plusieurs positions possibles de sources  $\{\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \dots, \tilde{\theta}_L\}$ , ce qui conduit à un quadrillage, ou à un échantillonnage spatial, incluant le maximum de positions potentielles des sources à localiser. Nous formons donc une grille spatiale des hypothétiques positions des sources. Ce nombre de positions  $L$  est beaucoup plus grand que le nombre de sources réelles  $P$ , et même beaucoup plus grand que le nombre de capteurs  $N$ . La matrice  $A$  ( $N \times L$ ) est alors construite sous la forme suivante :  $A(\tilde{\theta}) = [a(\tilde{\theta}_1), a(\tilde{\theta}_2), \dots, a(\tilde{\theta}_L)]$ . Dans cette représentation la matrice de transfert est connue et ne dépend pas de la position exacte des sources qui est fournie par l'ensemble  $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_P\}$ , comme indiqué dans (1). D'autre part, les amplitudes complexes des signaux atteignant l'antenne à l'instant  $t$  peuvent être exprimées par un vecteur de dimension ( $L \times 1$ ) :  $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_L(t)]^T$  où le  $k^{\text{ième}}$  élément  $x_k(t)$  n'est pas nul et égal à  $s_k(t)$  si  $x_k(t)$  et  $s_k(t)$  correspondent à la même position de source, alors que tous les autres éléments sont nuls. Nous avons la représentation :

$$y(t) = A(\tilde{\theta}) x(t) + b(t) \quad ; \quad t = \{1, 2, \dots, T\} \quad (2)$$

Le vecteur d'observation  $y(t)$  apparaissant dans (1) ou dans (2) est identique, cependant, une forme de représentation redondante apparaît dans (2) nous permettant de transformer le problème de l'estimation paramétrique de la position des sources en problème d'estimation parcimonieuse spatiale de ces sources. Autrement dit, la localisation des sources est maintenant conditionnée par les valeurs non nulles de  $\{x_i(t)\}$ . Nous avons transformé le problème traditionnel de l'estimation des paramètres  $\{\theta_i\}$  en un problème d'estimation du spectre spatial de  $x(t)$  qui présentera des pics importants aux positions exactes des sources. L'hypothèse de départ est que le nombre de sources est faible ainsi le spectre spatial est parcimonieux, c'est-à-dire que la majorité des éléments de  $x(t)$  sont nuls (ou quasi-nuls). Nous avons en fait le problème de minimisation de la fonctionnelle objective  $J(x)$ , faisant intervenir un terme d'attache aux données en norme  $l_2$  et une pénalité en norme  $l_1$  sur les coefficients :

$$J(x) = \|y(t) - A(\tilde{\theta})x(t)\|_2^2 + \lambda \|x(t)\|_1 \quad (3)$$

Nous cherchons donc une représentation parcimonieuse d'un jeu de données  $y(t)$  parmi les éléments d'un dictionnaire représenté par la matrice  $A$  de taille ( $N \times L$ ). La parcimonie est mesurée à l'aide de la norme  $l_1$  correspondant au nombre d'éléments non nuls du vecteur  $x(t)$  et l'estimation des paramètres consiste à réaliser un compromis entre la quantité d'erreur résiduelle en norme  $l_2$  et la parcimonie des coefficients de la représentation. Nous allons donc minimiser le critère composite (3) dans lequel le premier terme quantifie l'erreur entre les observations et un modèle donné, et le second terme favorise les modèles parcimonieux. Le paramètre  $\lambda > 0$  contrôle le degré de parcimonie de la solution  $\hat{x} = \arg \min J(x)$ , c'est-à-dire son nombre de composantes non nulles. Des travaux récents [10] établissent des conditions portant sur le dictionnaire  $A$  pour garantir l'unicité du minimiseur si celui-ci est suffisamment parcimonieux. Cependant, un compromis entre fidélité aux mesures et parcimonie de la solution est à trouver et la nature du compromis dépendra du paramètre de régularisation  $\lambda$  : un  $\lambda$  faible favorise les solutions correspondant aux mesures alors qu'un  $\lambda$  important conduira à une solution parcimonieuse, au risque de s'éloigner des mesures. La représentation par un dictionnaire de valeurs complexes rend difficile le problème de minimisation du critère (3) car l'optimisation n'est plus un programme quadratique. Le problème peut cependant être formulé comme un programme conique du second ordre (Second Order Cone Programming) permettant d'aborder l'optimisation plus aisément [7-9].

La forme générale d'un SOCP s'écrit sous la forme suivante d'une minimisation par rapport à  $x$  :

$$\min c^T x \text{ avec } Ax = b \text{ et } x \in K \quad (4)$$

où  $K$  est un cône quadratique, c'est-à-dire tel que  $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{L-1} \text{ avec } \|x_2\|_2 \leq 1\}$ . Les minimisations des deux termes de (3) s'écrivent comme des SOCP, pour cela on introduit deux variables auxiliaires  $z$  et  $t$  telles que :

$$z = y - Ax \text{ et } \|x\|_1 = \min 1^T t \quad (5)$$

où  $1$  est un vecteur ( $L \times 1$ ) formé de 1. D'autre part, une autre variable auxiliaire  $s$  est considérée pour composer une optimisation combinatoire avec le paramètre de régularisation et la minimisation de (3) se transforme en un problème de minimisation sous contraintes :

$$\min (s + \lambda 1^T t) \text{ sous les contraintes } \|z\|_2^2 \leq s \text{ et } \left\| \begin{matrix} \operatorname{Re}(x_k) \\ \operatorname{Im}(x_k) \end{matrix} \right\|_2 \leq t_k \quad (6)$$

Nous devons minimiser  $\|z\|_2^2$ . Puisque  $s$  peut se décomposer en deux termes quadratiques  $s = (s+1)^2/4 - (s-1)^2/4$  on a la contrainte  $\|z\|_2^2 \leq s$  qui peut être transformée en  $\|z\|_2^2 + (s-1)^2/4 \leq (s+1)^2/4$  et qui se met alors sous la forme  $\|z, (s-1)/2\|_2 \leq (s+1)/2$ , qui est une forme du type SOCP. En posant  $u = (s+1)/2$  et  $v = (s-1)/2$  la relation (6) devient :

$$\min (s + \lambda 1^T t) \text{ sous les contraintes } \|z, v\|_2 \leq u \text{ et } \left\| \begin{matrix} \operatorname{Re}(x_k) \\ \operatorname{Im}(x_k) \end{matrix} \right\|_2 \leq t_k \quad (7)$$

Le problème d'optimisation (7) se met sous la forme d'un programme conique du second ordre : nous avons une fonction objectif linéaire à minimiser sous un ensemble de contraintes quadratiques. Dans le cadre de cette communication, ce problème sera résolu en utilisant les résultats développés en [9].

### 3.2 $l_1$ DVS et parcimonie

Avec  $T$  échantillons temporels on peut trouver  $T$  solutions parcimonieuses spatiales. Cette manière de procéder conduit à un temps de calcul important et à une forte sensibilité vis-à-vis du bruit puisqu'on traite des problèmes indépendants, sans prendre en bloc l'ensemble des échantillons. Nous souhaitons plutôt utiliser la synergie de l'ensemble des données temporelles. Pour cela on sait que l'ensemble des vecteurs  $\{y(t)\}$  est lié à un sous-espace de dimension  $P$  appelé sous-espace signal et nous allons utiliser ce sous-espace pour réaliser la parcimonie spatiale. On suppose que le nombre  $P$  de sources présentes dans le milieu est connu. Cette hypothèse n'est pas obligatoire, mais permet de diminuer de façon importante le temps de calcul des algorithmes. Soit  $Y$  la matrice ( $N \times T$ ) des données temporelles :  $Y = [y(1) \ y(2) \ \dots \ y(T)]$ . Nous définissons de manière similaire  $X$  et  $B$  et nous obtenons :

$$Y = A(\tilde{\theta}) X + B \quad (8)$$

Nous effectuons la décomposition en valeurs singulières (DVS) de la matrice  $Y$  :  $Y = W \Sigma V^T$  et nous déduisons la matrice d'observation réduite  $Y_{DVS} = W \Sigma D_P = YVD_P$  où  $D_P = [I_P \ 0]^T$ . De la même manière, nous avons  $X_{DVS} = XVD_P$  et  $B_{DVS} = BVD_P$ , de sorte que nous pouvons écrire :

$$Y_{DVS} = A(\tilde{\theta}) X_{DVS} + B_{DVS} \quad (9)$$

En considérant cette équation colonne par colonne, chaque colonne correspondant à un vecteur singulier du sous-espace signal, nous pouvons écrire :

$$y_{DVS}(p) = A(\tilde{\theta}) x_{DVS}(p) + b_{DVS}(p) \quad p=1, \dots, P \quad (10)$$

ce qui a la même forme que (2) excepté qu'ici l'indice porte sur le  $p^{\text{ième}}$  vecteur singulier et non sur l'échantillon temporel et le nombre d'équations est réduit de  $T$  à  $P$ . Il faut noter que la matrice  $X_{DVS}$  a par construction une structure bidimensionnelle : l'une relative à l'espace, à laquelle on affecte l'indice  $i$ , et l'autre relative aux vecteurs singuliers, auxquels on affecte l'indice  $p$ . Nous désirons imposer une parcimonie uniquement spatiale sur les éléments de  $X_{DVS}$ . Pour cela nous considérons la norme  $l_2$  de tous les éléments

singuliers relatifs à l'indice spatial  $i$  de la DVS, c'est-à-dire on considère  $\tilde{x}_i^{(l_2)} = \sqrt{\sum_{p=1}^P (x_{DVS_i}(p))^2}$  et nous

effectuons une pénalité en norme  $l_1$  de  $\tilde{x}_i^{(l_2)}$ . La parcimonie des  $P$  vecteurs  $\tilde{x}_i^{(l_2)}$  résultants correspond à la parcimonie du spectre spatial. Nous déterminons le spectre spatial par minimisation de la fonctionnelle

$$J(\tilde{X}) = \left\| Y_{DVS} - A X_{DVS} \right\|_F^2 + \lambda \left\| \tilde{X}^{(l_2)} \right\|_1 \quad (11)$$

qui a la même forme que la fonctionnelle (3) et le problème est formulé comme un programme conique du second ordre (SOCP) étudié précédemment.

Pour établir une modélisation applicable lors de la localisation de sources à large bande, nous pouvons partitionner le spectre du signal en plusieurs bandes, ou en plusieurs parties, chacune étant considérée à

bande étroite. Nous transformons les données temporelles dans le domaine fréquentiel et nous obtenons :

$$y(f) = A(\tilde{\theta}, f) x(f) + b(f) \tag{12}$$

où  $f = t/T$ ,  $t = \{0, 1, \dots, T-1\}$ . Pour réduire le temps de calcul, nous divisons d'abord l'ensemble des fréquences en plusieurs régions  $(f_1, f_1')$ ,  $(f_2, f_2')$ , ...,  $(f_w, f_w')$ , ensuite, nous choisissons une fréquence typique dans chaque région, pour obtenir une représentation de la matrice de transfert dans cette région. Par exemple, dans la région  $(f_k, f_k')$ , nous pouvons obtenir la fréquence typique par un moyennage :  $f_{k\text{-typique}} = \frac{f_k + f_k'}{2}$  et la matrice de transfert est  $A(f_{k\text{-typique}})$ . Ainsi le problème de la localisation des sources à large bande est converti en  $W$  sous-problèmes de la localisation des sources à bande étroite.

### 4 Applications

On considère une antenne acoustique linéaire formée de 6 capteurs, équidistants de  $d/\lambda = 0,5$ . Deux sources ponctuelles sont situées à  $13^\circ$  et  $18^\circ$  par rapport à la normale de l'antenne. Ces sources sont en champ lointain. On comparera les traitements d'antenne par beamforming, par les algorithmes de Capon, MUSIC et parcimonie. On considère le cas (a) où le nombre d'échantillons est  $T=20$  et le cas (b) où le RSB est de 2 dB. La figure 1 nous montre que seul l'algorithme par parcimonie qui a été développé peut localiser les deux sources. Si les deux sources sont corrélées notre algorithme est aussi le plus performant (figure 1(c)). La figure 2 (a) nous montre la localisation de 3 sources large bande par parcimonie. La figure 2(b) nous montre que l'algorithme MUSIC ne peut pas localiser 5 sources décorréelées en champ proche, ce qui est réalisé avec l'algorithme développé dans la communication (figure 2c). La figure 2d nous montre que deux sources corrélées en champ proche peuvent aussi être localisées par notre algorithme, ce qui est impossible par Capon ou MUSIC. La figure 3 nous montre les résultats des essais expérimentaux en chambre anéchoïque sur la localisation de deux sources non corrélées puis corrélées. L'algorithme utilisant la représentation parcimonieuse fournit les meilleurs résultats par rapport aux algorithmes à haute résolution classiques.

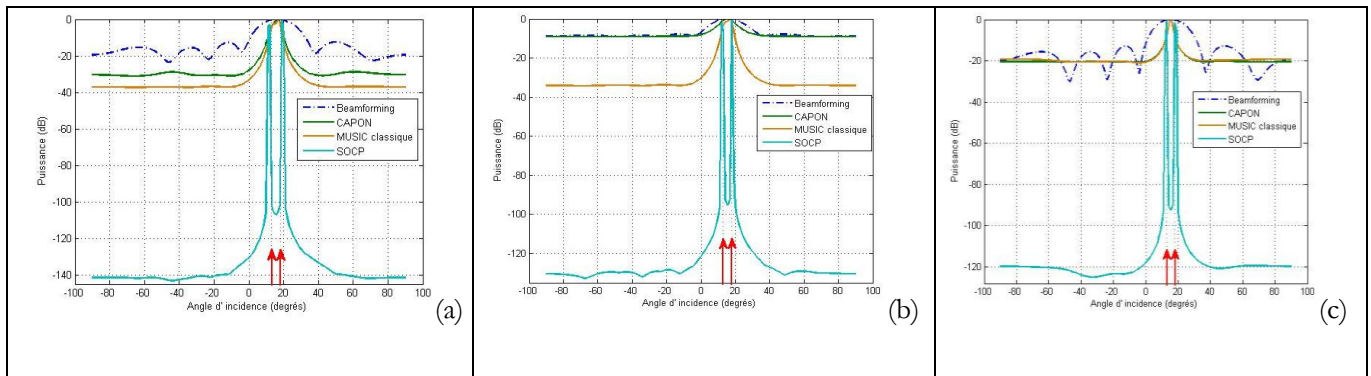


Figure 1. Localisation de deux sources décorréelées lorsque (a)  $T=20$  ; lorsque (b)  $RSB=2$  dB ; (c) lorsqu'elles sont totalement corrélées

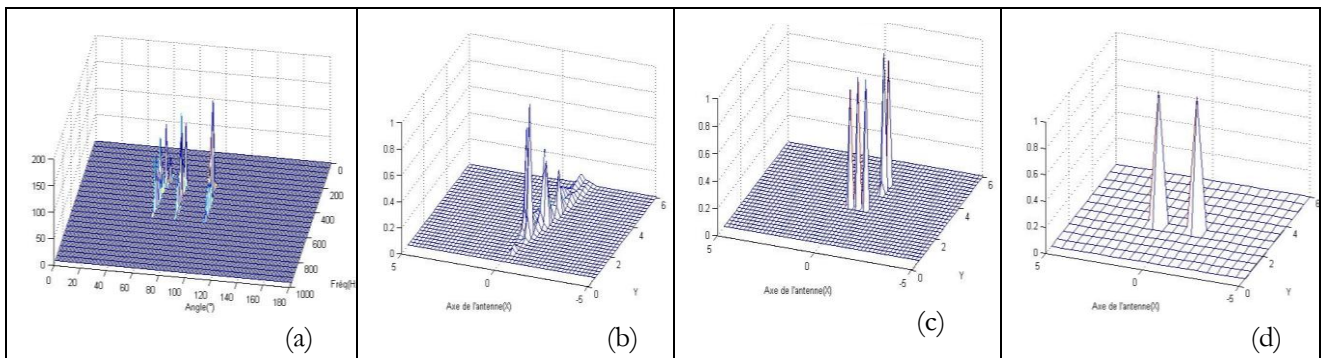


Figure 2. (a) Localisation de trois sources à large bande par parcimonie ; (b) 5 sources décorréelées en champ proche par MUSIC ; (c) 5 sources décorréelées en champ proche par parcimonie, (d) 2 sources corrélées en champ proche par parcimonie

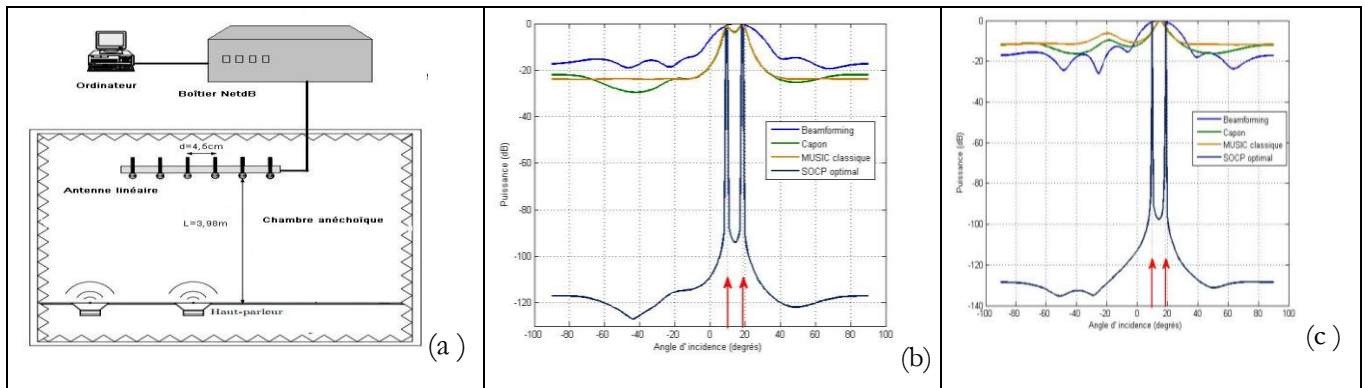


Figure 3. (a) Schéma expérimental ; (b) Localisation de deux sources décorréées en chambre anéchoïque ; (c) Localisation de deux sources corrélées en chambre anéchoïque

## 5 Conclusion et perspectives

Par comparaison avec les méthodes classiques, comme la méthode de formation de faisceaux conventionnelle, la méthode de Capon et la méthode de MUSIC, la localisation de sources ponctuelles en utilisant une représentation parcimonieuse dans le cadre SOCP parvient à une bonne résolution même sous des conditions défavorables, comme par exemple, le faible nombre d'échantillons temporels, un rapport signal sur bruit faible, la corrélation des sources et les signaux à large bande. Les simulations et les expérimentations montrent que c'est un algorithme efficace pour la localisation de plusieurs sources sonores ponctuelles aussi bien à bande étroite qu'à large bande, en champ proche et en champ lointain, que les sources soient non corrélées ou bien corrélées. L'un des inconvénients de l'algorithme SOCP est son important temps de calcul et il sera intéressant de développer des algorithmes de traitement des données plus rapides. L'étude du biais et de la variance des résultats obtenus avec cet algorithme doit aussi être effectuée et les résultats comparés aux bornes de Cramer-Rao. Le choix du paramètre de régularisation se fait empiriquement et une optimisation de ce paramètre doit être réalisée. L'analyse du pouvoir de résolution vis-à-vis d'un nombre important de sources à large bande en champ proche et en champ lointain sera aussi à développer. Il sera intéressant de réaliser une étude théorique sur l'unicité des solutions obtenues et sur leur stabilité en fonction du bruit et des erreurs de mesure. Finalement, on a montré que l'algorithme développé a d'excellentes performances lors des simulations et en chambre anéchoïque, il faudra par la suite le tester dans des situations réelles existant en milieu industriel.

## Références

- [1] Mermoz H., Imagerie, corrélation et modèles; Annales des Télécommunications; Vol.31, pp.17-36 ;1976
- [2] Pillai S.U., Array signal processing; Springer-Verlag; 1989
- [3] Schmidt R.O., Multiple emitter location and signal parameter estimation ; IEEE Transaction on Antennas and Propagation ; Vol. 34, pp.276-280 ;1986
- [4] Stoica P. and Moses R., Introduction to Spectral Analysis; Prentice Hall ; 1997
- [5] Marcos S., Les méthodes à haute résolution ; Edition Hermès, Paris, 1998
- [6] Lardiès J., Ma H., Berthillier M., Localization of radiating sources by an acoustical array; Third International Conference on Multidisciplinary Design, Optimization and Applications; Paris, Juin 2010
- [7] Bourguignon S., Carfantan H. and Bohm T., Spar Spec : a new method for fitting multiple sinusoids with irregularly sampled data.; Astronomy&Astrophysics, Vol. 462, pp. 379-387; 2007
- [8] Malioutov D.M., Cetin M., Fisher III J.W. and Willsky A.S., Superresolution source localization through data-adaptive regularization, Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop, Virginia, USA, pp. 194-198; 2002
- [9] Sturm, J.S. "Using SeDuMi 1.02, a Matlab toolbox for optimization over symmetric cones," Optimization Methods and Software; Vol. 11, pp. 625-653; 1999
- [10] Fuchs J.J., Recovery of exact sparse representations in the presence of bounded noise, IEEE Transaction on Information Theory, Vol. 51, pp.3601-3608; 2005