

Outils Numériques pour la Simulation de Propagation d'Ondes dans les Structures Périodiques Amorties

K. Billon^a, M. Ouisse^a, E. Sadoulet-Reboul^a, M. Collet^b

a. Département Mécanique Appliquée, Institut FEMTO-ST, 24 rue de l'Épitaube, 25000 Besançon, France

kevin.billon@femto-st.fr - morvan.ouisse@femto-st.fr - emeline.sadoulet-reboul@univ-fcomte.fr

b. LTDS, 36 avenue Guy de Collongue, 69134 Ecully, France

manuel.collet@ec-lyon.fr

Résumé :

Les structures périodiques possèdent des propriétés spécifiques en termes de propagation d'ondes. Dans cet article, des outils numériques permettant la détermination des relations de dispersion dans les structures périodiques sont présentés. Premièrement, la méthode de Floquet-Bloch est présentée comme référence. Cette technique consiste à résoudre le problème sur une cellule unitaire avec des conditions limites adaptées cependant l'introduction d'amortissement dans les cas 2D et 3D n'est pas facile. Dans un second temps, la méthode intitulée "Shifted-Cell Operator" est décrite. Elle est basée sur une reformulation du problème aux équations aux dérivées partielles, la périodicité étant incluse dans le comportement global de la structure et des conditions de continuité sur les bords de la cellule sont imposées. Cette stratégie permet de résoudre le problème quelle que soit l'évolution en fréquence des propriétés de la cellule. On présente la méthode, ainsi qu'un cas d'application sur une structure périodique amortie.

Abstract :

Periodic structures exhibit very specific properties in terms of wave propagation. In this paper, some numerical tools for dispersion analysis of periodic structures are presented. The classical Floquet-Bloch approach is first presented, as a reference. This technique uses proper boundary conditions on the unit cell, it is quite simple to implement but dealing with damping is not easy for 2D or 3D cases. Secondly, the "Shifted-Cell Operator" technique is described. It consists in a reformulation of the PDE problem by "shifting" in terms of wave number the space derivatives appearing in the mechanical behavior operator inside the cell, while imposing continuity boundary conditions on the borders of the domain. Damping effects can be introduced in the system. This strategy make it possible to solve the problem with an arbitrary frequency dependency of the physical properties of the cell. This method is presented as well as an application case about a damped periodic structure.

Mots clefs : Structure Périodique, Dispersion, Amortissement.

1 Introduction

Un milieu périodique est un matériau ou une structure possédant une périodicité spatiale. L'étude des structures périodiques a une longue histoire dans le domaine de la vibroacoustique. A titre d'exemple, Newton a étudié la propagation du son dans l'air [1]. Il a conclu que le son se propage dans l'air comme une onde élastique dans un réseau périodique de masses-ressorts. Le sujet intéresse les chercheurs de diverses branches de la physique depuis de nombreuses années, l'objectif étant de concevoir des structures possédant des propriétés que les structures conventionnelles ne possèdent pas. Les méthodes utilisées actuellement sont basées, la plupart du temps, sur les méthodes dérivant de l'étude de la propagation d'ondes dans les cristaux où il n'y a quasiment pas de dissipation. A l'échelle de la dynamique des structures, les effets liés à l'amortissement doivent être inclus dans les analyses. Les lecteurs intéressés par les origines, les travaux en cours et les perspectives sur le sujet pourront se référer à l'article de synthèse publié récemment [3].

2 Présentation de la structure

La structure est un guide d'onde bidirectionnel infini (Fig. 1) [6]. Elle est constituée d'une plaque de 1 mm d'épaisseur et de plots cylindriques le tout en Aluminium 6063-T83 ($\nu = 0.33$, $E = 69e9[Pa]$ et $\rho = 2700[kg/m^3]$). La cellule élémentaire ainsi que son réseau réciproque associé sont présentés sur la (Fig. 2).

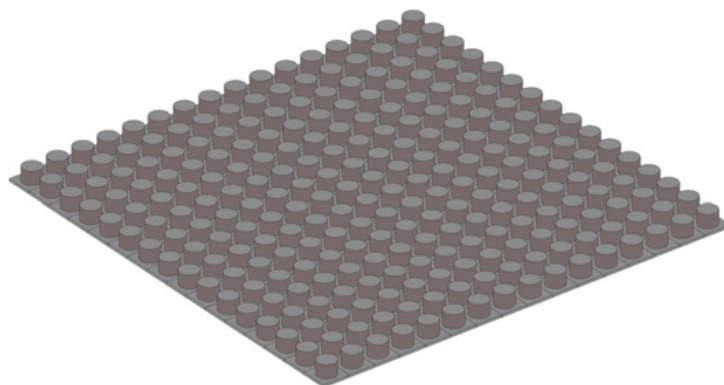


FIGURE 1 – Plaque infinie.

3 Méthode de Floquet-Bloch

La méthode de Floquet-Bloch est une méthode couramment utilisée pour la détermination de diagrammes de dispersion de structures périodiques cependant l'implémentation de l'amortissement n'est pas simple dans des cas 2D et 3D.

La loi de comportement du matériau est supposée linéaire, élastique et isotrope. Les conditions de périodicité sont définies sur les bords du domaine par $u_R = e^{-jk_x r_1} u_L$ et $v_R = e^{-jk_y r_2} v_L$ (Fig. 2) où u_R (resp. v_R) est le déplacement du bord de droite et u_L (resp. v_L) est le déplacement du bord de gauche dans la direction x (resp. y), k_x and k_y sont respectivement les nombres d'ondes dans les directions x et y . Des éléments tétraédriques quadratiques sont utilisés pour mailler la cellule élémentaire.

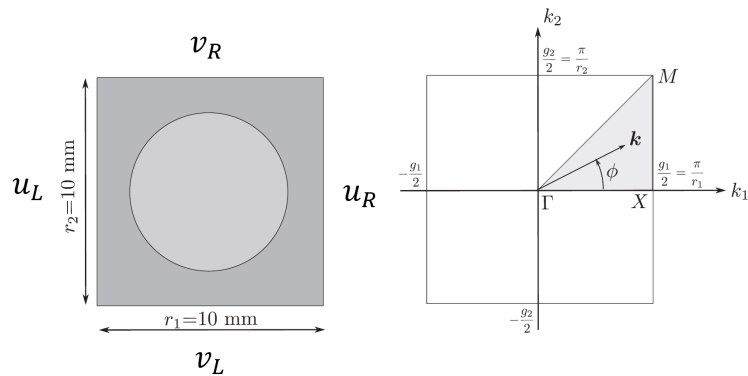


FIGURE 2 – Réseau réel et Réseau réciproque associé.

L'équilibre dynamique du système est régi par le problème aux dérivées partielles

$$\rho\omega^2 u + \nabla\sigma = 0, \quad \sigma = C : \varepsilon, \quad (1)$$

où $u \in \mathbb{R}^3$ est le déplacement, σ est le tenseur des contraintes, C est le tenseur d'élasticité, ε est le tenseur des déformations, ρ est la masse volumique du matériau considéré et ω est la pulsation.

Une étude paramétrique aux valeurs propres est menée utilisant le solveur Pardiso [5] avec deux paramètres à savoir les nombres d'ondes $k_x \in [0 \pi/r_1]$ et $k_y \in [0 \pi/r_2]$. Les fréquences propres sont obtenues en résolvant le problème. Le diagramme de dispersion pour le système considéré sans amortissement est tracé sur tout le contours de la zone de Brillouin (Fig. 3). La représentation de la dispersion uniquement sur le contours de la zone de Brillouin est suffisant pour l'observation des bandes interdites [4]. La structure possède des bandes interdites directionnelles et une bande interdite omnidirectionnelle entre 114 et 143 kHz indépendante de la direction de propagation de l'onde.

Dans cette approche, les paramètres sont les nombres d'ondes et les solutions sont les fréquences. Cela rend difficile la résolution de problème avec des matériaux possédant des dépendances en fréquence.

4 Méthode du "Shifted-Cell Operator"

La technique du "Shifted-Cell Operator" consiste en une reformulation du problème aux dérivées partielles en décalant les nombres d'ondes dans l'espace des dérivées. Par conséquent, la périodicité est incluse dans le comportement global de la structure et des conditions de continuité sur les bords de la cellule sont imposées.

Un nouveau problème aux valeurs propres est obtenu [2]

$$[(K - \omega^2 M) + \lambda_i(L - L^T) - \lambda_i^2 H]\phi_i^r = 0, \quad (2)$$

où $\lambda_i = jk_i$ est la i -ème valeurs propres, ϕ_i^r est le vecteur propre à droite associé à λ_i , M et K sont respectivement les matrices standards de masse et de raideur, L est une matrice anti-symétrique et H est une matrice définie semi-positive. Dans cette formulation, toutes les matrices sont potentiellement dépendantes de ω .

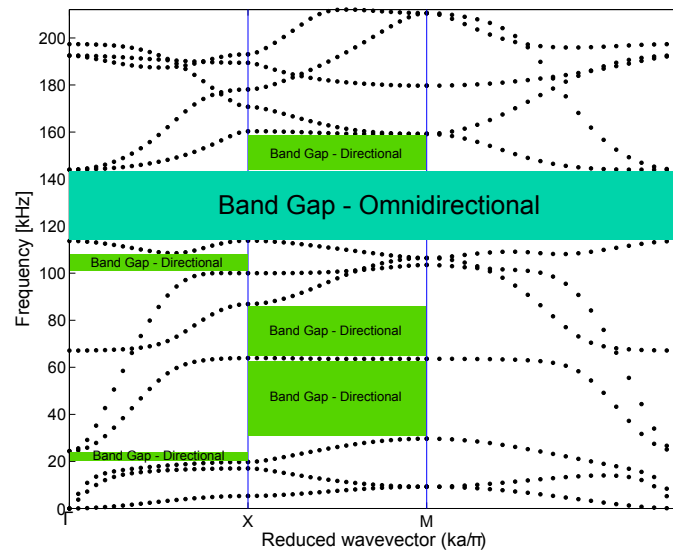


FIGURE 3 – Relation de Dispersion sur le contours de la zone de Brillouin. Bandes interdites complète et partielles en bleu et vert respectivement.

Des conditions de continuité sont imposées sur les bords de la cellule à savoir $u_R = u_L$ et $v_R = v_L$.

Une étude paramétrique aux valeurs propres est menée en utilisant le solveur Pardiso. Dans ce problème, la pulsation ω et la direction de propagation de l'onde ϕ sont imposées. Les solutions du problème aux valeurs propres quadratique sont les vecteurs d'ondes $\lambda_i = jk_i$ et les vecteurs propres associés à droite ϕ_i^r .

Généralement, les vecteurs propres à gauche et à droite pour le même problème aux valeurs propres ne sont pas égaux. Dans la résolution du problème à droite, le i -ème mode ($i \in \mathbb{N}^*$) est défini par sa valeur propre $\lambda_i \geq 0$ et son vecteur propre ϕ_i^r . Pour chaque mode i , un mode $-i$ est associé avec $\lambda_{-i} \leq 0$ tel que $\lambda_{-i} = -\lambda_i$ et ϕ_{-i}^r tel que $\phi_{-i}^l = \phi_i^r$. Donc en résolvant le problème aux valeurs propres à droite, la solution du problème adjoint est également trouvée.

Cette approche autorise l'introduction des effets liés à l'amortissement.

Dans un problème avec amortissement tous les nombres d'ondes sont complexes par conséquent la distinction entre les ondes propagatives et évanescentes est difficile. Des critères de tri permettent de faire la distinction.

Pour un système amorti avec des matériaux possédant des dépendances en fréquence, l'estimation de la vitesse de groupe n'est pas triviale. À titre d'exemple, on considère un cas homogène où la dépendance en fréquence est caractérisé par un module d'Young tel que $E = f(\omega)E_0$ et coefficient de poisson constant. D'où une dépendance en fréquence des matrices du problème aux valeurs propres $K = f(\omega)K_0$, $H = f(\omega)H_0$ et $L = f(\omega)L_0$.

En partant de l'équation (Eq. 2) et après différentes étapes de calcul, une expression explicite de la vitesse de groupe est obtenue :

$$C_g = \text{real} \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_i} \right) = \text{real} \left(\frac{j \phi_i^l T [f(\omega)(-L_0 + L_0^T + 2\lambda_i H_0)] \phi_i^r}{\phi_i^l T [\omega^2 \frac{\partial f}{\partial \omega} - 2\omega] M \phi_i^r} \right). \quad (3)$$

Une comparaison des résultats obtenus avec la méthode de Floquet-Bloch et la méthode "Shifted-Cell Operator" est étudiée dans le cas conservatif pour valider l'implémentation de la méthode "Shifted-Cell Operator". La Fig. 4 présente le diagramme de dispersion obtenu le long du chemin $\Gamma - X$ c'est à dire quand la direction de propagation ϕ est nulle. Les deux méthodes donnent des résultats similaires par conséquent la méthode "Shifted-Cell Operator" est validée.

Les effets liés à l'amortissement sont désormais introduits et les résultats obtenus sont présentés sur la (Fig. 5). Un amortissement hystérétique est introduit via un module de Young complexe $E^* = E(1 + j\eta)$ avec η le facteur de perte. L'amortissement réduit la largeur des bandes interdites mais il a aussi l'avantage d'atténuer les résonances.

La variation du paramètre ϕ de 0° à 45° , relatif à la direction de propagation de l'onde, permet de parcourir toute la zone de Brillouin. Le chemin $\Gamma - X$ est obtenu en fixant ϕ à 0° et le chemin $\Gamma - M$ en fixant ϕ à 45° . Pour le chemin $X - M$ une recherche des valeurs propres au alentours de $\frac{\pi}{r_1}/\cos(\phi)$ est effectuée. Cela revient à fixer le nombre d'ondes k_x du vecteur d'ondes k .

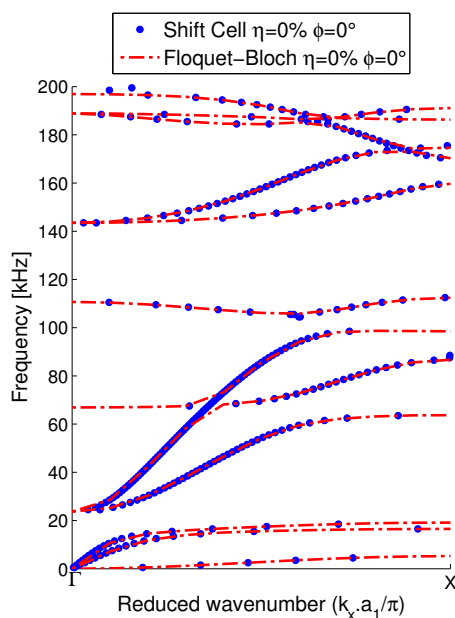


FIGURE 4 – Comparaison des deux approches.

5 Conclusion

Les structures périodiques sont intéressantes du point de vue des bandes interdites complètes ou partielles associées à la non propagation d'ondes dans le réseau. La détermination du diagramme de dispersion est une nécessité pour concevoir des structures avec des bandes de fréquences d'absorption spécifiques. La méthode de Floquet-Bloch est une technique commune mais l'implémentation en présence d'amortissement est difficile. La seconde approche, appelée "Shifted-Cell Operator", est basée sur la reformulation du problème aux équations aux dérivées partielles. Cette méthode est appliquée à une structure non amortie pour validation. Cette dernière permet la simulation avec de l'amortissement. Ces outils vont nous permettre de simuler des géométries plus complexes comme par exemple un composite avec un cœur nid d'abeille amorti.

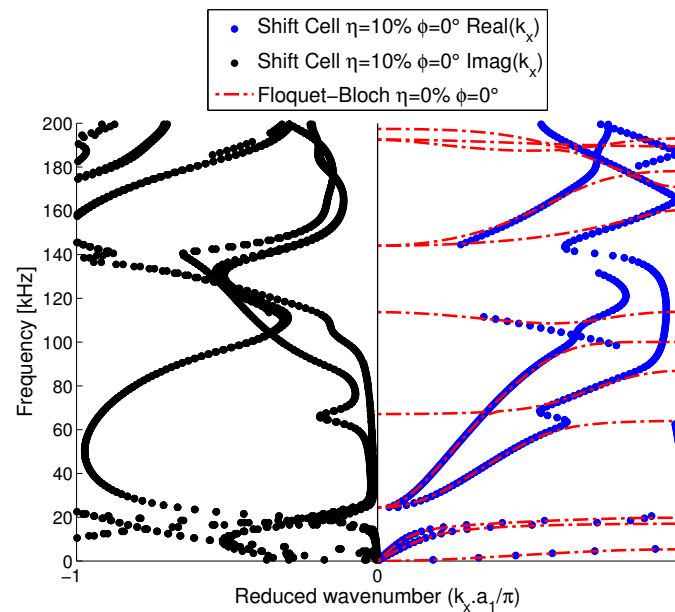


FIGURE 5 – Courbes de dispersion avec amortissement hystérétique, parties réelles et parties imaginaires des nombres d’ondes respectivement en bleu et noir

Remerciements

Ce travail est financé par l’Agence National de la Recherche (ANR-12-JS09-008-COVIA) et réalisé en partenariat avec le Labex ACTION (ANR-11-LABX-0001-01).

Références

- [1] L. Brillouin. *Wave propagation in periodic structures*. Dover Publication, 1953.
- [2] M. Collet, M. Ouisse, M. Ruzzene, and M.M. Ichchou. Floquet–bloch decomposition for the computation of dispersion of two-dimensional periodic, damped mechanical systems. *International Journal of Solids and Structures*, 48(20) :2837–2848, 2011.
- [3] M.I. Hussein, M.J. Leamy, and M. Ruzzene. Dynamics of phononic materials and structures : Historical origins, recent progress, and future outlook. *Applied Mechanics Reviews*, 66(4) :040802, 2014.
- [4] J.D. Joannopoulos, S.G. Johnson, J.N. Winn, and R.D. Meade. *Photonic crystals : molding the flow of light*. Princeton university press, 2011.
- [5] O. Schenk and K. Gärtner. Solving unsymmetric sparse systems of linear equations with pardiso. *Future Generation Computer Systems*, 20(3) :475–487, 2004.
- [6] T. Wu, T. Wu, and J. Hsu. Waveguiding and frequency selection of lamb waves in a plate with a periodic stubbed surface. *Physical Review B*, 79(10) :104306, 2009.