

Conception robuste de dispositifs d'amortissement intégrant des matériaux viscoélastiques

K. Jaboviste^{ab}, E. Sadoulet-Reboul^a, N. Peyret^c, G. Chevallier^a, C. Arnould^b
and E. Collard^b

a. Univ. Bourgogne Franche-Comté Institut FEMTO-ST

Département Mécanique Appliquée, 24, rue de l'épithaphe, F-25000 Besançon

b. Thales Optronique SAS, 2, Avenue Gay Lussac, F-78995 Elancourt CEDEX

c. Quartz - Supméca, 3, rue Fernand Hainaut, F-93400 Saint-Ouen

Résumé :

Le travail proposé vise à fournir une boîte à outils pour la conception de dispositifs d'amortissement intégrant des matériaux viscoélastiques. Le cas d'application étudié est un stabilisateur d'image optique dans lequel ces matériaux assurent l'amortissement et la flexibilité du système afin d'isoler les éléments optiques des vibrations et des chocs. Une stratégie est ainsi proposée pour prendre en compte le comportement des matériaux viscoélastiques dans différents types de simulations : analyse modale, réponse fréquentielle ou réponse temporelle. Pour atteindre cet objectif, les éléments viscoélastiques sont décrits à l'aide d'un modèle de Maxwell généralisé, et le modèle dynamique à résoudre est ré-écrit sous une formulation d'état originale. Afin de réduire le coût de calcul, celle-ci est associée à une stratégie de réduction de modèle. Comme les matériaux viscoélastiques sont très sensibles aux variations de température notamment, le modèle a été adapté pour prendre en compte les différents champs de température sur les plages de sollicitation considérées. Les différents résultats obtenus sont présentés et comparés à des données expérimentales pour valider les démarches. Dans un contexte où la température varie, et donc la performance des isolants est incertaine, un choix optimal robuste de la conception est étudié pour assurer l'efficacité des systèmes isolants.

Abstract :

This work aims to provide a toolbox for the design of optical image stabilizer. Both mechanical and electro-mechanical devices can be used to stabilize imaging devices. The mechanical devices are constituted with viscoelastic materials that provide damping and flexibility in order to isolate the optical devices from vibrations and shocks. The purpose of this paper is to give a framework for taking into account viscoelastic materials behavior in different simulations, complex eigenvalue analysis, frequency response or time response. To achieve this goal, the generalized Maxwell model is associated to an original state-space formulation. To reduce CPU cost, it is associated with model order reduction. As these materials are very sensitive to temperature variation, the model has been adapted to take easily into account different temperature fields over the domain. Many results are presented and compared to experimental data in order to validate the algorithms. Besides, in a context where the temperature and thus the performance of the insulators may vary in a unknown way an optimal robust choice of the design is studied to ensure the efficiency of the systems.

Mots clefs : viscoélasticité, amortissement, analyse modale complexe, robustesse, info-gap

1 Introduction

Les matériaux viscoélastiques sont communément reconnus comme étant des éléments d'amortissement passif efficaces et sont largement utilisés dans de nombreux secteurs industriels comme l'automobile, le secteur naval et l'aéronautique. La conception d'absorbeurs viscoélastiques est rendue complexe par de nombreuses subtilités comme la nécessité de faire un choix entre différents modèles rhéologiques ayant des domaines de validité distincts, les difficultés d'identification qui en découlent et outre ces aspects, la forte dépendance des propriétés du matériau à la fréquence, la température, le taux de déformation et la précharge. De plus, les modèles éléments finis employés dans les applications industrielles sont généralement des modèles de grande taille menant à des temps de calcul importants. L'utilisation courante de structures viscoélastiques en tant qu'absorbeurs vibratoires rend essentiel le développement d'outils efficaces et robustes pour leur étude, modale dans un premier temps, et leur conception dans un contexte d'incertitudes sévères, en particulier sur la température. Le travail présenté dans ce papier a pour but de proposer un cadre général sur ce sujet.

Le papier est organisé comme suit. Le cas d'étude industriel est détaillé dans la première partie, tout comme le modèle rhéologique du matériau viscoélastique qui présente une dépendance à la fréquence et à la température. La stratégie mise en place pour résoudre le problème aux valeurs propres de ce genre de système est décrite dans la seconde partie et les résultats obtenus sont comparés à des données expérimentales provenant d'essais sur ladite structure. Pour finir, une analyse de robustesse est présentée dans la troisième partie comme un outil efficace pour quantifier l'impact d'incertitudes en température sur la capacité du système industriel à amortir les vibrations.

2 Modélisation

2.1 Cas étudié

Une structure intégrant des composants viscoélastiques est utilisée comme support pour le travail présenté dans ce papier. Il s'agit d'un amortisseur situé dans un stabilisateur de systèmes optiques, lui-même embarqué sous un avion de chasse. Les éléments viscoélastiques sont ajoutés pour atteindre un niveau d'amortissement suffisant dans toutes les directions durant les phases de vols (Fig.1-A). L'amortisseur est composé d'une structure en acier et les éléments viscoélastiques sont ajoutés par un procédé d'injection à chaud. Une partie de l'amortisseur est directement attachée à la masse embarquée alors que l'autre est reliée à la structure principale. Dans notre cas, les vibrations sont transmises aux optiques par cette structure porteuse. La discrétisation du modèle est effectuée grâce à la Méthode des Éléments Finis (MEF) en utilisant des éléments tétraédriques quadratiques. Le modèle nominal est composé de 83037 noeuds, et de 249111 Degrés De Liberté (DDL). Le maillage entre les éléments viscoélastiques et la structure acier est supposé compatible.

2.2 Comportement rhéologique des éléments viscoélastiques

L'hypothèse de viscoélasticité linéaire provient de l'existence d'une fonction de relaxation permettant d'exprimer la contrainte comme une convolution avec l'historique des déformations [7, 10]. En utilisant

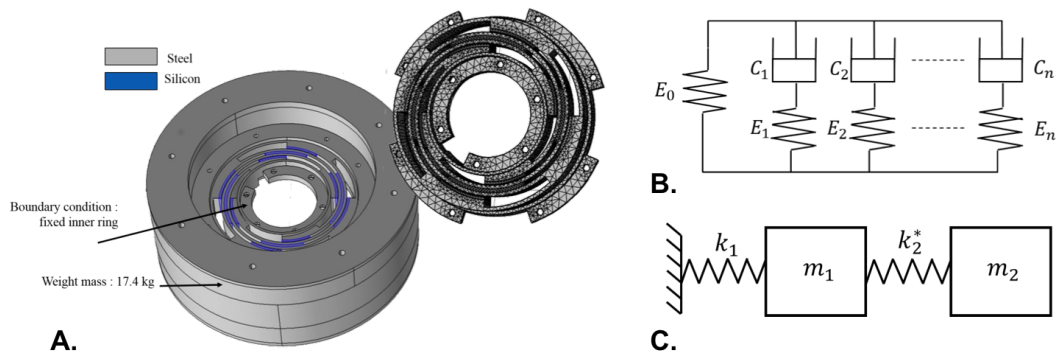


Fig. 1 – A : CAO de l’amortisseur composé d’une structure acier et d’éléments viscoélastiques, modèle éléments finis avec des tétraèdres ; B : Représentation du Modèle de Maxwell Généralisé(GMM) comme une série de ressort et d’éléments visqueux ; C : Modèle 2 DDL de l’amortisseur

une transformée de Fourier, il est possible d’obtenir une représentation équivalente où le matériau viscoélastique est maintenant caractérisé par un module complexe E^* qui dépend directement de la pulsation ω et de la température T . Il peut aussi dépendre de la contrainte initiale σ_0 . Dans de nombreux papiers, il est divisé en deux termes. Une partie réelle, le module de stockage E' , et une partie imaginaire E'' , le module de perte :

$$\hat{\sigma}(\omega) = E^*(\omega, T, \sigma_0)\epsilon(\omega) = [E'(\omega, T, \sigma_0) + j.E''(\omega, T, \sigma_0)]\hat{\epsilon}(\omega) \quad (1)$$

Afin de mener des études fiables sur le comportement de l’amortisseur, le modèle rhéologique des éléments viscoélastiques doit être réaliste sur une large bande de fréquence et doit permettre de prendre en compte les variations du comportement en fonction de la température. Le Modèle de Maxwell Généralisé (GMM) [12] est choisi car il possède à la fois une représentation temporelle et fréquentielle. Ainsi, il peut être employé pour de nombreux types d’excitations. De plus, il est aussi possible de l’adapter pour élargir l’intervalle d’étude et une dépendance à la température peut y être intégrée. Le module complexe dynamique peut alors s’écrire comme suit :

$$E^* = E_\infty + \sum_{i=1}^{ncell} \frac{E_i \tau_i j \omega}{1 + \tau_i j \omega} = E_\infty \left(1 + \sum_{i=1}^{ncell} \frac{\alpha_i \tau_i j \omega}{1 + \tau_i j \omega} \right) \quad (2)$$

où E_∞ est le module d’élasticité long-terme, E_i le module dynamique de la $i^{ème}$ cellule et τ_i la constante de temps. L’augmentation du nombre de cellules ($ncell$) permet au modèle d’être viable sur une plus grande plage fréquentielle moyennant une augmentation du nombre de paramètres. La seconde forme du modèle est plus adaptée aux simulations dynamiques. Elle introduit un facteur de rigidification α_i comme étant le ratio E_i/E_∞ .

Il est à noter que le GMM peut encore être modifié pour prendre en compte une possible dépendance au taux de déformation (connue sous le nom d’effet Payne) en ajoutant des éléments frottants par exemple. Cela permet ainsi d’envisager de futures simulations dans un contexte non-linéaire. La Figure. 1-B montre la représentation rhéologique du GMM.

3 Simulation et validation

3.1 Simulation numérique : Analyse modale complexe

L'analyse modale d'un système viscoélastique n'est pas classique à cause de la dépendance des différents paramètres à la fréquence. En sélectionnant le GMM pour décrire le comportement des éléments viscoélastiques et en supposant le reste de la structure comme élastique, le problème aux valeurs propres complexes à résoudre peut-être écrit de la manière suivante,

$$-\omega^2[M]\hat{U} + [K_{elastic}]\hat{U} + \sum_{i=1}^{nbmat} [K_{visco}^i] \left(\sum_{k=1}^{ncell} \frac{\alpha_k^i \tau_k^i j\omega}{1 + \tau_k^i j\omega} \hat{U}^i \right) = 0 \quad (3)$$

où $[M]$ et $[K_{elastic}]$ représentent les matrices de masse et de raideur élastique. $nbmat$ est le nombre de matériau viscoélastique différents présents dans le système, $ncell$ est le nombre de cellules de Maxwell dans chaque GMM. α_{ik} et τ_{ik} sont respectivement le facteur de rigidification et le temps de relaxation pour la k^{eme} cellule du modèle associé au i^{eme} matériau viscoélastique. K_{visco}^i est une matrice de rigidité construite à partir de la matrice de rigidité du i^{eme} sous-domaine viscoélastique, complétée avec des termes nuls pour être de la même dimension que les autres opérateurs du modèle éléments finis. Cette équation ne se présente pas sous une forme classique. Le système est alors transformé pour obtenir un problème aux valeurs propres généralisé en passant par une représentation d'état [8, 6]. La Figure.2-gauche représente les différentes étapes de la démarche proposée.

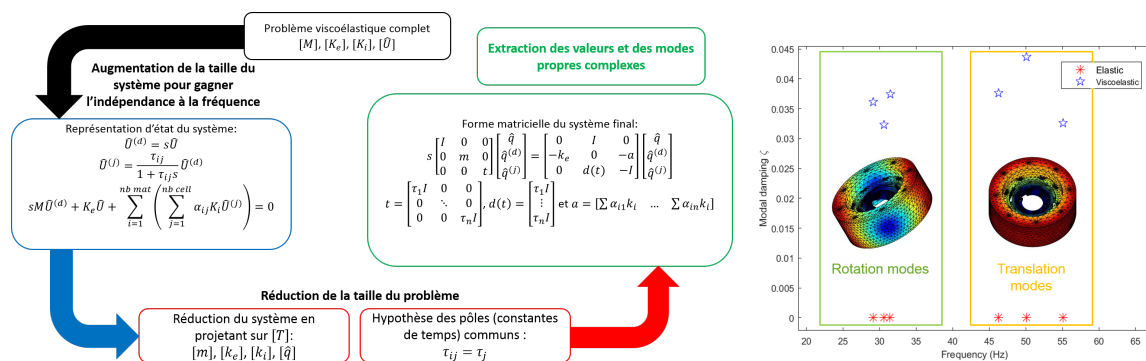


Fig. 2 – GAUCHE : Formulation d'état avec réduction du modèle ; DROITE : Analyse Modale Complexe : Système élastique (astérisque rouge) versus système viscoélastique (étoile bleue)

Le principal problème avec cette approche provient de la taille du système. En effet, si l'on considère $nbcell$ termes dans chaque GMM, la taille de la formulation d'état est $(ncell + nbmat + 2)N_{DDL}$ où N_{DDL} représente le nombre de DDL du modèle éléments finis initial.

Afin de réduire la taille du problème, les constantes de temps sont identiques pour tous les matériaux viscoélastiques du système. L'identification des paramètres du GMM sous cette hypothèse reste physiquement viable [5]. Comme l'amortisseur étudié ici ne contient qu'un seul type de matériau viscoélastique, le problème peut être réduit à,

$$-\omega^2[M]\hat{U} + [K_{elastic}]\hat{U} + [K_{visco}] \sum_{k=1}^{ncell} \frac{\alpha_k \tau_k j\omega}{1 + \tau_k j\omega} \hat{U} = 0 \quad (4)$$

Une seconde action pour améliorer le temps de calcul est de réduire directement la taille du système.

Les opérateurs $[M]$, $[K_{elastic}]$ et $[K_{visco}]$ sont projetés sur une base multi-modèle tronquée [2, 11]. Dans un problème dynamique prenant en compte la viscoélasticité, l'approche multi-modèle permet de créer une base de projection représentative du comportement rigidifiant du matériau viscoélastique lors de l'augmentation de la fréquence de la sollicitation. Pour construire cette base, une base "basse fréquence" $[\Phi_{BF}]$ constituée des p premiers modes normaux est extraite en résolvant :

$$(-\omega_p^2[M] + [K_{elastic}] + [K_{visco}(\omega=0)]) \phi_p = 0 \quad (5)$$

Ces modes normaux vérifient les deux conditions :

$$[\Phi_{BF}]^T [M] [\Phi_{BF}] = [I] \quad (6)$$

$$[\Phi_{BF}]^T [K_{elastic+visco}(\omega=0)] [\Phi_{BF}] = [\Omega^2] \quad (7)$$

Une autre base $[\Phi_{HF}]$, aussi composée des p premiers modes à "haute fréquence" est stockée :

$$\left(-\omega_p^2[M] + [K_{elastic}] + Re([K_{visco}] \sum_{k=1}^{ncell} \frac{\alpha_k \tau_k j \omega_{HF}}{1 + \tau_k j \omega_{HF}}) \right) \phi_p = 0 \quad (8)$$

où ω_{HF} est la pulsation associée à la fréquence maximum du domaine d'étude. Ensuite, une ortho-normalisation de Gram-Schmidt modifiée est utilisée pour concaténer ces deux bases en une base multi-modèle $[T]$. Cet opérateur est de dimension $N_{DDL} * 2p$.

Grâce à ces deux hypothèses, la taille de la formulation finale du problème viscoélastique est $2p(2 + n_{bcell})$. Le temps de calcul est ainsi plus raisonnable et l'extraction des valeurs propres complexes ω_i ainsi que des vecteurs propres complexes ϕ_i est possible. Dans notre cas, les fréquences propres et les amortissements modaux associés sont déterminés par :

$$f_{pi} = |(f_i)/2\pi| \quad (9)$$

$$\zeta_i = -Im(f_i)/f_{pi} \quad (10)$$

3.2 Validation

Des tests expérimentaux sur l'amortisseur étudié ont permis d'identifier les premières fréquences de résonances autour de 30 Hz pour les trois modes de rotations et autour de 50 Hz pour les trois modes de translations. Un sinus balayé de 0.5 g d'amplitude sur une plage de fréquence allant de 10 à 1000 Hz est utilisé pour exciter l'amortisseur. L'analyse modale complexe est conduite et un diagramme fréquence-amortissement modal est tracé (Fig.2-droite).

Une comparaison entre le système viscoélastique (étoile bleue) et le système purement élastique (astérisque rouge) est faite. Toutes les fréquences identifiées à partir du système élastique sont disposées sur l'axe horizontal puisque qu'aucune dissipation n'est introduite dans la formulation du problème. L'analyse modale complexe permet de prendre en compte ce comportement dissipatif amené par les éléments viscoélastiques et de calculer l'amortissement modal pour chacun des modes. Un léger décalage entre les fréquences propres calculées pour les deux types de problème peut être observé. Une telle représentation est utile pour quantifier les effets des variables du système (comme la température) sur la localisation des pôles comme cela sera exposé dans la troisième partie. Afin de valider cette analyse, la Fonction de Réponse en Fréquence (FRF) du modèle complet est calculée pour une excitation par sinus balayé sui-

vant la direction X. La fréquence de résonance et l'amortissement modal associé (f_0, ζ) sont comparés pour le mode de translation en X. À partir de la FRF, on obtient ($f_0 = 47 \text{ Hz}$, $\zeta = 0.043$) où, pour l'analyse modale complexe, on obtient ($f_0 = 49 \text{ Hz}$, $\zeta = 0.044$). Ainsi, l'analyse modale complexe semble prédire correctement le comportement modal du système viscoélastique.

4 Analyse de robustesse en présence d'incertitudes sur la température

4.1 Contexte de l'étude

Le dispositif mécanique présenté dans ce papier est sujet à d'importants changements en température qui peuvent être décrits par de soudaines variations comprises entre -20°C et 50°C . À cause de la localisation de l'amortisseur dans le système final, il est compliqué de connaître précisément la température ambiante des éléments viscoélastiques et comme cela a été mentionné précédemment, leur capacité de dissipation dépend fortement de la température. La température effective à laquelle est soumise l'amortisseur dans le cadre d'applications réelles peut donc varier et le profil de cette variation est une inconnue considérée comme un manque de connaissance. Dans un tel environnement, il pourrait être intéressant d'être capable de garantir un certain niveau d'amortissement et même de savoir si un matériau viscoélastique moins absorbant mais plus robuste au changement de température serait préférable à un autre matériau plus dissipatif mais moins robuste. Dans ce contexte, le but de cette dernière partie est d'étudier la robustesse d'un matériau viscoélastique donné quand le champ de température est incertain.

Par soucis de simplicité et néanmoins sans perte de généralité, l'approche a été développée sur un système viscoélastique masse ressort à deux degrés de liberté (Fig.1-C). Ce modèle est dimensionné pour être représentatif des deux premiers modes du dispositif mécanique étudié.

Le comportement viscoélastique est intégré au ressort entre les deux masses et les paramètres k_1, k_2, m_1 et m_2 sont réglés pour obtenir les deux premières fréquences de résonance de l'amortisseur. Le GMM est aussi réduit à un modèle de Zener puisque la plage de fréquence étudiée est restreinte. Ainsi, le problème peut s'écrire :

$$\left(-\omega^2[M] + [K_{elastic}] + \frac{j\alpha(T)\omega\tau(T)}{1 + j\omega\tau(T)}[K_{visco}(T)] \right) \hat{U} = 0 \quad (11)$$

De plus, le temps de relaxation τ est supposé être constant et ne pas dépendre de la température. L'utilisateur est libre de choisir sur quel intervalle fréquentiel le modèle de Zener sera viable. Ainsi, dans cette partie, les seuls paramètres dépendants de la température sont le module long-terme E_{infty} (lié à $[K_{visco}]$) et le coefficient α . Une identification de ces paramètres basée sur des courbes expérimentales extraites à différentes températures peut être considérée. Cependant, en pratique, il est compliqué de connaître et contrôler précisément cette variable durant des essais de caractérisation. Afin de s'affranchir de cette difficulté, une dépendance en température arbitrairement choisie est imposée. Le matériau viscoélastique utilisé dans cette étude possède une température de transition vitreuse autour de 50°C . Pour illustrer l'importance d'une analyse de robustesse, l'intervalle de température considéré est $[45^\circ\text{C}; 55^\circ\text{C}]$. La Figure. 3 montre l'impact de la dépendance du coefficient α à la température sur les fréquences propres et les amortissements modaux du système à deux DDL. Comme prévu, il apparaît que l'amortissement modal change avec l'évolution de la température. Cet effet étant plus important sur

le premier mode, l'analyse de robustesse va donc être appliquée sur ce dernier.

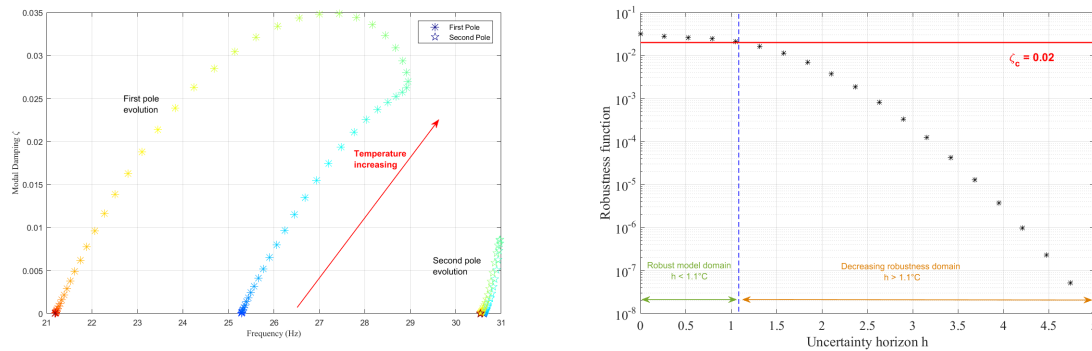


Fig. 3 – GAUCHE : Influence de la dépendance du coefficient α à la température sur les fréquences propres et les amortissements modaux du système à deux DDL ; DROITE : Courbe de robustesse obtenue par la méthode info-gap pour l'amortissement modal du premier mode

4.2 Analyse de robustesse par la méthode info-gap : introduction et application

La démarche est basée sur la théorie info-gap [3, 4, 9, 1]. Cette approche repose sur trois éléments : un *modèle d'incertitude*, un *modèle du système étudié* et un *critère de performance*. L'information intéressante dans cette étude est l'amortissement modal du premier mode. Ainsi, le modèle du système à deux DDL est le modèle utilisé pour calculer cet amortissement, une fois tous les paramètres d'entrées renseignés (dimensions, matériaux, ...). L'équation 9 permet d'extraire l'amortissement modal après avoir effectué une analyse modale complexe sur le problème aux valeurs propres complexes suivant :

$$\left(-\omega_p^2 [M] + [K_{elastic}] + \frac{j\alpha(T)\omega_p\tau}{1 + j\omega_p\tau} [K_{visco}(T)] \right) \phi_p = 0 \quad (12)$$

Le modèle info-gap pour l'incertitude en température T est formulé sous la forme suivante :

$$U(h) = \left\{ T : |T - \tilde{T}| \leq h \right\}, h \geq 0 \quad (13)$$

où h est l'horizon d'incertitude, variant pour cette étude entre 0 and $5^\circ C$. \tilde{T} représente la température nominale, fixée à la température de transition vitreuse. Ainsi, l'intervalle de température balayé est compris entre $45^\circ C$ et $55^\circ C$. L'objectif principal est de déterminer comment l'amortissement modal évolue en fonction de la variation en température. En pratique, cette approche peut être utilisé pour connaître les cas où l'amortissement modal du mode considéré ζ_1 sera inférieur à une valeur critique ζ_c en considérant l'incertitude en température. Dans ce cadre, le critère de performance peut être exprimé comme une inégalité :

$$\zeta_1(T) \geq \zeta_c \quad (14)$$

La robustesse désigne le plus grand horizon d'incertitude h pouvant être toléré en température tout en satisfaisant le critère de performance :

$$\hat{h}(\zeta_c) = \max \left\{ h : \left[\min_{T \in U(h)} \zeta_1(T) \right] \geq \zeta_c \right\}, \zeta_c \geq 0 \quad (15)$$

Grâce à l'analyse modale complexe et l'approche info-gap, il est possible d'extraire l'amortissement modal minimum du mode étudié et d'observer l'impact de la fluctuation en température sur cette variable. La Figure 3 - droite présente les résultats de l'analyse info-gap pour l'amortissement modal du premier mode. Il apparaît clairement que pour un horizon d'incertitude inférieur à $1.1^{\circ}C$, l'amortissement modal fourni par le système est supérieur au critère de performance. En d'autres termes, le modèle dynamique est considéré comme robuste pour une variation de température de $\pm 1.1^{\circ}C$ autour de la température nominale. En dehors de cet intervalle, la robustesse décroît avec l'augmentation de l'horizon d'incertitude.

5 Conclusion

Dans ce papier, un cadre est proposé afin de prévoir le comportement dynamique de structures incluant des éléments viscoélastiques. Une telle démarche n'est pas simple à mettre en place à cause de la dépendance des matériaux viscoélastiques à de nombreux facteurs comme la fréquence ou la température et à cause du temps de calcul élevé lorsqu'un modèle éléments finis est utilisé. Pour montrer et valider la méthodologie proposée, cette dernière est appliquée à un amortisseur spécifique présentant des éléments viscoélastiques. La prise en compte du comportement viscoélastique est assurée par l'utilisation d'un GMM. Il s'agit d'un modèle rhéologique flexible et facile à implémenter numériquement. Une analyse modale complexe est conduite et les résultats numériques sont comparés aux données expérimentales fournies par l'industriel. L'analyse modale complexe a été effectuée sous certaines hypothèses : le système possède des pôles communs pour tous les matériaux viscoélastiques et les opérateurs peuvent être projetés sur une base multi-modèle. Ces hypothèses conduisent à des temps de calculs raisonnables. Cette approche a ainsi été validée et a montré son efficacité pour prédire les fréquences propres et les amortissements modaux associés pour des systèmes viscoélastiques.

En viscoélasticité, la température est un paramètre influant sur le comportement dynamique et la prise en compte du champ de température mène à des incertitudes à cause de sa complexité. Une analyse de robustesse basée sur la méthode info-gap a été menée pour quantifier l'impact des ces incertitudes sur l'amortissement modal. Il apparaît que le modèle dynamique est fiable pour de petites fluctuations en température mais la robustesse décroît rapidement quand l'horizon d'incertitude s'agrandit. La méthode semble être validée pour le modèle simplifié d'un système viscoélastique dynamique.

Les travaux en cours concernent la simulation de la réponse dynamique des structures incluant des éléments viscoélastiques dans les cas d'excitations de différentes natures et prenant en compte les phénomènes non-linéaires. De plus, il sera intéressant d'appliquer l'analyse de robustesse au système dynamique réel avec des hypothèses sur la dépendance en température viables.

Références

- [1] Sez Atamturktur, Zhifeng Liu, Scott Cogan, and Hsein Juang. Calibration of imprecise and inaccurate numerical models considering fidelity and robustness : a multi-objective optimization-based approach. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 51(3) :659–671, 2015.
- [2] Etienne Balmes. Model reduction for systems with frequency dependent damping properties. *Office national d'études et de recherche aérospatiale. ONERA-Publications*, 1997.
- [3] Yakov Ben-Haim. *Info-Gap Decision Theory, Second Edition : Decisions Under Severe Uncertainty 2nd Edition*. Academic Press ; 2 edition, October 2006.

-
- [4] Yakov Ben-Haim and François M. Hemez. Robustness, fidelity and prediction-looseness of models. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 468(2137) :227–244, 2011.
- [5] Gaël Chevallier, Franck Renaud, J-L Dion, and S Thouviot. Complex eigenvalue analysis for structures with viscoelastic behavior. In *ASME 2011 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, pages 561–569. American Society of Mechanical Engineers, 2011.
- [6] Gael Chevallier, Franck Renaud, and Jean-Luc Dion. Viscoelastic damping effect on brake squeal noise. In *ASME 2009 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, pages 2049–2056. American Society of Mechanical Engineers, 2009.
- [7] J.D. Ferry. *Viscoelastic Properties of Polymers*. Wiley, 1980.
- [8] Hugo Festjens, Gaël Chevallier, Franck Renaud, Jean-Luc Dion, and Remy Lemaire. Effectiveness of multilayer viscoelastic insulators to prevent occurrences of brake squeal : A numerical study. *Applied Acoustics*, 73(11) :1121–1128, 2012.
- [9] A Kuczkowiak, S Cogan, M Ouisse, E Foltête, and M Corus. Robust expansion of experimental mode shapes under epistemic uncertainties. In *Model Validation and Uncertainty Quantification, Volume 3*, pages 419–427. Springer International Publishing, 2014.
- [10] Roderic S. Lakes. *Viscoelastic Solids (Mechanical and Aerospace Engineering Series) 1st Edition*. Mechanical and Aerospace Engineering Series (Book 9). CRC Press ; 1 edition, October 1998.
- [11] Anne-Sophie Plouin and Etienne Balmès. Steel/viscoelastic/steel sandwich shells computational methods and experimental validations. In *International Modal Analysis Conference*, volume 4062, pages 384–390, 2000.
- [12] Franck Renaud, Jean-Luc Dion, Gaël Chevallier, Imad Tawfiq, and Rémi Lemaire. A new identification method of viscoelastic behavior : Application to the generalized maxwell model. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 25(3) :991–1010, 2011.