

# Technique en Sous-Domains Élémentaires dans les Machines Asynchrones à Cage d'Écureuil : Saturation Magnétique Locale & Courants de Foucault dans les Barres

Lazhar ROUBACHE<sup>1</sup>, Kamel BOUGHRARA<sup>1</sup>, Frédéric DUBAS<sup>2</sup>, Rachid IBTIOUEN<sup>1</sup>

<sup>1</sup> École Nationale Polytechnique (LRE-ENP), Rue des Frères Oudek, Hassan Badi, B.P. 182, El-Harrach, 16200, Alger, Algérie

<sup>2</sup> Département ÉNERGIE, FEMTO-ST, CNRS, Univ. Bourgogne Franche-Comté, F90000 Belfort, France

Email : roubache.lazhar@gmail.com, kamel.boughrara@g.enp.edu.dz, FDubas@gmail.com, rachid.ibtiouen@gmail.com

**RESUME**—Dans cet article, les auteurs présentent un modèle semi-analytique d'une machine asynchrone à cage d'écureuil en considérant la saturation magnétique locale et les courants de Foucault induits dans les barres rotoriques. Les régions du rotor et du stator sont divisées en sous-domaines élémentaires (SDs-E) caractérisés par des solutions générales au premier harmonique des équations de Maxwell en magnéto-harmonique. Ces SDs-E sont connectés dans les deux directions (i.e., selon les bords  $r$  et  $\theta$ ). Le calcul du champ magnétique a été validé pour plusieurs valeurs de la perméabilité relative du fer et du glissement. Toutes les grandeurs électromagnétiques ont été comparées à ceux obtenues par une méthode numérique en deux dimensions (2-D), viz., FEMM. Les résultats semi-analytiques sont satisfaisants par rapport aux numériques, en considérant l'amplitude et la forme d'onde.

**Mots-clés**—Technique en sous-domaines élémentaires, Saturation magnétique locale, Courants de Foucault, Machine asynchrone à cage d'écureuil, Performances électromagnétiques.

## 1. INTRODUCTION

Les modèles (semi-)analytiques sont rapides, précis et principalement adaptés aux premières étapes de conception optimale. La technique en sous-domaines (SDs) est l'une des méthodes semi-analytiques les plus récentes pour prédire le champ électromagnétique et pour calculer les performances électromagnétiques. Plusieurs états de l'art sur cette technique, dans les machines électriques, peuvent être trouvés dans [1]-[8]. L'application de cette modélisation aux machines asynchrones à cage d'écureuil peut être trouvée dans [9]-[12], mais malheureusement en négligeant la saturation magnétique globale ou locale. Jusqu'en 2015, la prise en compte du fer dans la technique en SDs était effectuée uniquement dans des régions : i) périodiques (e.g., dans les machines asynchrones à rotor solide [13]), ou ii) avec des conditions aux limites (CLs) homogènes (e.g., dans les ponts magnétiques des machines synchrones à concentration de flux [14]). En 2017, Dubas *et al.* ont proposé une nouvelle contribution scientifique dans la technique en SDs en insérant des régions ferromagnétiques [5] et [15]. Cette méthode dite exacte en 2-D a été appliquée à une bobine à noyau d'air ou de fer (en coordonnée cartésienne [5] et polaire [15]) alimenté par un courant continu. La solution générale des équations de Maxwell en magnéto-statique 2-D est décomposée en série de Fourier à partir deux solutions dans les deux directions et respecte les CLs sur les différents bords en appliquant le principe de superposition. Roubache *et al.* ont

modélisé semi-analytiquement une machine synchrone à concentration de flux avec les parties ferromagnétiques en utilisant la technique en SDs ainsi que les polynômes de Taylor pour connecter les régions sur les bords [16]-[17]. Dans [18], la méthode exacte de Dubas *et al.* [15] a été implémentée sur les machines électriques à flux radial et à aimants permanents. Dans [19], Roubache *et al.* ont développé un modèle semi-analytique avec la saturation magnétique locale en utilisant l'algorithme itératif de Newton Raphson. L'idée principale de ce nouveau type de modèle est de mailler les régions du rotor et du stator en SDs-E. La solution générale est identique à celle de [15]. Néanmoins, les SDs-E sont supposés suffisamment petits de telle sorte que la variation du potentiel vecteur magnétique  $A_z$  peut être considérée comme non importante, conduisant ainsi de ne considérer que les premiers harmoniques selon la direction  $r$  et  $\theta$  dans la solution générale.

Dans ce papier, les auteurs se proposent de modéliser une machine asynchrone à cage d'écureuil en utilisant la technique en SDs-E avec l'effet de saturation magnétique locale en prenant en compte les courants de Foucault induits dans les barres rotoriques. Les simulations ont été effectuées pour plusieurs valeurs de la perméabilité relative du fer et du glissement. Les résultats semi-analytiques en 2-D ont été comparés avec ceux obtenus par FEMM [20].

## 2. FORMULATION MATHÉMATIQUE EN SDS-E

Les Figs. 1 ~ 2 représentent respectivement une machine asynchrone à cage d'écureuil avec l'identification des différentes régions et le maillage en SDs-E du rotor ainsi que du stator.

En magnéto-harmonique 2-D, le potentiel vecteur magnétique s'exprime par :

$$A_z(r, \theta, t) = \Re e \left\{ A_z(r, \theta) \cdot e^{j\omega_{rm}t} \right\} \text{ dans le rotor} \quad (1)$$

$$A_z(r, \theta, t) = \Re e \left\{ A_z(r, \theta) \cdot e^{j\omega t} \right\} \text{ dans le stator} \quad (2)$$

avec  $j = \sqrt{-1}$  et  $\omega_{rm} = s\omega = \omega - p\varpi_r$  où  $\omega_{rm}$  représente la pulsation électrique au rotor,  $s$  le glissement,  $\omega$  la pulsation électrique au stator (ou de synchronisme),  $p$  le nombre de paires de pôles, et  $\varpi_r$  la pulsation mécanique au bout de l'arbre du rotor.

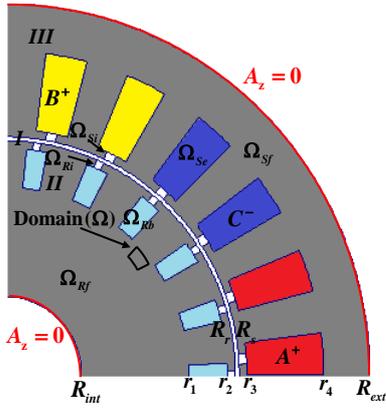


Fig. 1. Machine asynchrone à cage d'écureuil.

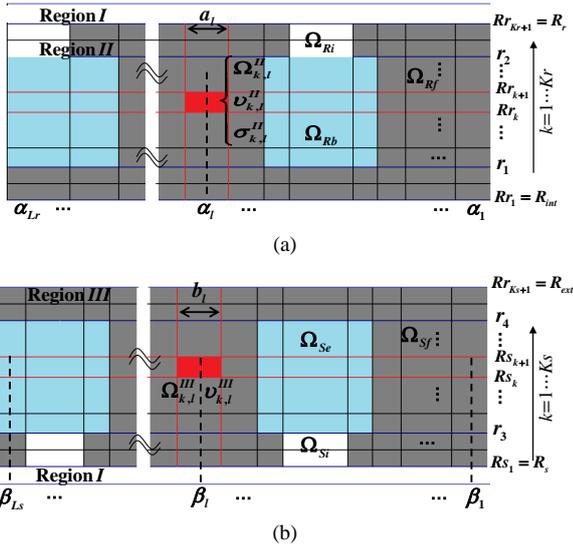


Fig. 2. Maillage en SDS-E du : (a) rotor et (b) stator.

L'équation aux dérivées partielles pour chaque domaine ( $\Omega$ ) est défini par :

$$\Delta A_z = \mathbf{j}\mu_0\sigma\omega_{rm} \cdot A_z \text{ pour } \Omega \in \Omega_{Rb}^j \quad (3)$$

$$\Delta A_z = -\mu_0 \cdot J_{sz}^i \text{ pour } \Omega \in \Omega_{Se}^i \quad (4)$$

$$\Delta A_z = 0 \text{ pour } \Omega \in \Omega_{Rf} \cup \Omega_{Sf} \cup \Omega_{Si} \cup \Omega_{Ri} \cup \Omega_I \quad (5)$$

où  $J_{sz}^i$  représente la densité surfacique de courant dans la  $i^{\text{ème}}$  encoche statorique,  $\sigma$  la conductivité électrique des barres rotoriques,  $\Omega_{Rb}^j$  &  $\Omega_{Se}^i$  respectivement la  $j^{\text{ème}}$  barre rotorique et la  $i^{\text{ème}}$  encoche statorique,  $\Omega_{Rf}$  &  $\Omega_{Sf}$  respectivement les régions ferromagnétiques rotoriques et statoriques,  $\Omega_{Ri}$  &  $\Omega_{Si}$  respectivement les isthmes des encoches rotoriques et statoriques, et  $\Omega_I$  l'entrefer. La résolution analytique de (3) conduit à des fonctions Bessel selon la direction  $r$ . Ces fonctions non-périodiques nécessitent la détermination numérique de la période spatiale pour connecter les SDS-E selon les bords  $r$ . Étant donné que les SDS-E sont suffisamment petits, la variation de  $A_z$  peut être considérée comme non importante, ce qui conduit à ne considérer que les premiers harmoniques selon la direction  $r$  et  $\theta$  dans  $A_z$ . De

plus, on peut considérer que les courants de Foucault induits dans les barres rotoriques  $J_{rz}^j$  sont constants. Par conséquent, (3) devient

$$\Delta A_z = -\mu_0 \cdot J_{rz}^j \text{ pour } \Omega \in \Omega_{Rb}^j \quad (6)$$

avec  $J_{rz}^j(r, \theta) \approx J_{rz}^j = -j\sigma\omega_{rm} \cdot \bar{A}_z$  où  $\bar{A}_z$  représente la valeur moyenne de  $A_z(r, \theta)$ .

La formulation utilisée dans ce document nécessite la définition des éléments de maillage représentés sur la Fig. 2 :

$$\alpha = [\alpha_1 \ \dots \ \alpha_l \ \dots \ \alpha_{Lr}] \in \mathfrak{R}^{Lr \times 1} \quad (7)$$

$$a = [a_1 \ \dots \ a_l \ \dots \ a_{Lr}] \in \mathfrak{R}^{Lr \times 1} \quad (8)$$

$$\beta = [\beta_1 \ \dots \ \beta_l \ \dots \ \beta_{Ls}] \in \mathfrak{R}^{Ls \times 1} \quad (9)$$

$$b = [b_1 \ \dots \ b_l \ \dots \ b_{Ls}] \in \mathfrak{R}^{Ls \times 1} \quad (10)$$

$$Rr = [R_{r_{int}} \ \dots \ R_{r_k} \ \dots \ R_{r_{Kr+1}}] \in \mathfrak{R}^{(Kr+1) \times 1} \quad (11)$$

$$Rs = [R_s \ \dots \ R_{s_k} \ \dots \ R_{s_{Ks+1}}] \in \mathfrak{R}^{(Ks+1) \times 1} \quad (12)$$

$$v_{II} = \{v_{II}^{k,l}\} \in \mathfrak{R}^{Kr \times Lr} \quad (13)$$

$$\sigma_{II} = \{\sigma_{II}^{k,l}\} \in \mathfrak{R}^{Kr \times Lr} \quad (14)$$

$$v_{III} = \{v_{III}^{k,l}\} \in \mathfrak{R}^{Ks \times Ls} \quad (15)$$

$$J_{z,III} = \{J_{III}^{k,l}\} \in \mathfrak{R}^{Ks \times Ls} \quad (16)$$

avec

$$v_{II}^{k,l} = \begin{cases} \frac{1}{\mu_0} & \text{if } \Omega^{k,l} \in \Omega_{Rb} \cup \Omega_{Ri} \\ \frac{1}{\mu_r \mu_0} & \text{if } \Omega^{k,l} \in \Omega_{Rf} \end{cases} \quad (17)$$

$$\sigma_{II}^{k,l} = \begin{cases} 0 & \text{if } \Omega^{k,l} \in \Omega_{Rf} \cup \Omega_{Ri} \\ \sigma & \text{if } \Omega^{k,l} \in \Omega_{Rb} \end{cases} \quad (18)$$

$$v_{III}^{k,l} = \begin{cases} \frac{1}{\mu_0} & \text{if } \Omega^{k,l} \in \Omega_{Sf} \cup \Omega_{Si} \\ \frac{1}{\mu_r \mu_0} & \text{if } \Omega^{k,l} \in \Omega_{Sf} \end{cases} \quad (19)$$

$$J_{III}^{k,l} = \begin{cases} 0 & \text{if } \Omega^{k,l} \in \Omega_{Sf} \cup \Omega_{Si} \\ J_{sz}^i & \text{if } \Omega^{k,l} \in \Omega_{Se}^i \end{cases} \quad (20)$$

La solution générale de (4) ~ (6) est donnée par [15] :

$$A_z(r, \theta) = A_z^\theta + A_z^r + A_z^p \quad (21)$$

où les termes  $\{A_z^\theta; A_z^r; A_z^p\}$  sont définis pour chaque région

comme suite :

- dans l'entrefer (**Région I**) :

$$A_{zI}(r, \theta) = A1_0 + A2_0 \ln(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A1_n \left( \frac{r}{R_s} \right)^n + A2_n \left( \frac{r}{R_r} \right)^{-n} \right] \sin(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A3_n \left( \frac{r}{R_s} \right)^n + A4_n \left( \frac{r}{R_r} \right)^{-n} \right] \cos(n\theta) \quad (22)$$

où  $\{A1_0; A2_0; A1_n \sim A4_n\}$  sont les constantes d'intégrations dans l'entrefer, et  $n$  les harmoniques spatiales.

- dans le stator (**Région III**) :

$$A_{zIII}^{k,l} = C_1^{k,l} + C_2^{k,l} \ln(r) - \frac{1}{4} \mu_0 J_{III}^{k,l} r^2 + (C_3^{k,l} r^{\beta_{sl}} + C_4^{k,l} r^{-\beta_{sl}}) \cos \left[ \mathcal{G}_{sl} \left( \theta - \beta_l + \frac{b_l}{2} \right) \right] + \left\{ C_5^{k,l} \sinh \left[ \lambda_{sk} \left( \theta - \beta_l + \frac{b_l}{2} \right) \right] + C_6^{k,l} \sinh \left[ \lambda_{sk} \left( \theta - \beta_l - \frac{b_l}{2} \right) \right] \right\} \sin \left[ \lambda_{sk} \ln \left( \frac{r}{R_{S_k}} \right) \right] \quad (23)$$

avec

$$\lambda_{sk} = \frac{\pi}{\ln(R_{S_{k+1}}/R_{S_k})} \quad \& \quad \mathcal{G}_{sl} = \frac{\pi}{b_l} \quad (24)$$

où  $\{C_1^{k,l} \sim C_6^{k,l}\}$  sont les constantes d'intégrations dans le stator.

- dans le rotor (**Région II**) :

Selon (6), la solution générale dans le rotor peut être définie par :

$$A_{zII}^{k,l} = B_1^{k,l} + B_2^{k,l} \ln(r) - \frac{1}{4} \mu_0 J_{zII}^{k,l} r^2 + (B_3^{k,l} r^{\beta_{rl}} + B_4^{k,l} r^{-\beta_{rl}}) \cos \left[ \mathcal{G}_{rl} \left( \theta - \alpha_l + \frac{a_l}{2} \right) \right] + \left\{ B_5^{k,l} \sinh \left[ \lambda_{rk} \left( \theta - \alpha_l + \frac{a_l}{2} \right) \right] + B_6^{k,l} \sinh \left[ \lambda_{rk} \left( \theta - \alpha_l - \frac{b_l}{2} \right) \right] \right\} \sin \left[ \lambda_{rk} \ln \left( \frac{r}{R_{R_k}} \right) \right] \quad (25)$$

avec

$$\lambda_{rk} = \frac{\pi}{\ln(R_{R_{k+1}}/R_{R_k})} \quad \& \quad \mathcal{G}_{rl} = \frac{\pi}{a_l} \quad (26)$$

mais  $J_{zII}^{k,l} = -j\sigma_{II}^{k,l} \omega_{rm} \bar{A}_{zII}^{-k,l}$ , ce qui donne :

$$J_{zII}^{k,l} = -j\sigma_{II}^{k,l} \omega_{rm} \left[ B_1^{k,l} + \zeta_2^{k,l} B_2^{k,l} - \gamma_{k,l} J_{zII}^{k,l} + \zeta_5^{k,l} (B_5^{k,l} - B_6^{k,l}) \right] \quad (27)$$

avec

$$\gamma_{k,l} = \mu_0 (R_{k+1}^2 + R_k^2) / 2 \quad (28)$$

$$\zeta_2^{k,l} = \frac{a_l [R_{k+1}^2 \ln(R_{k+1}) - R_k^2 \ln(R_k)]}{2S_{\Omega^{k,l}}} - \frac{1}{2} \quad (29)$$

$$\zeta_5^{k,l} = R_k^2 \frac{[\cosh(\lambda_{rk} a_l) - 1] [e^{2\ln(R_{k+1}/R_k)} + 1]}{S_{\Omega^{k,l}} (4 + \lambda_{rk}^2)} \quad (30)$$

avec  $S_{\Omega^{k,l}} = a_l (R_{k+1}^2 - R_k^2) / 2$  représente la surface de  $\Omega^{k,l}$ .

Finalement, en utilisant (27) ~ (30), (25) devient

$$A_{zII}^{k,l} = B_1^{k,l} + B_2^{k,l} \ln(r) + \chi^{k,l} (B_1^{k,l} + \zeta_2^{k,l} B_2^{k,l} + \zeta_5^{k,l} (B_5^{k,l} - B_6^{k,l})) r^2 + (B_3^{k,l} r^{\beta_{rl}} + B_4^{k,l} r^{-\beta_{rl}}) \cos \left[ \mathcal{G}_{rl} \left( \theta - \alpha_l + \frac{a_l}{2} \right) \right] + \left\{ B_5^{k,l} \sinh \left[ \lambda_{rk} \left( \theta - \alpha_l + \frac{a_l}{2} \right) \right] + B_6^{k,l} \sinh \left[ \lambda_{rk} \left( \theta - \alpha_l - \frac{a_l}{2} \right) \right] \right\} \sin \left[ \lambda_{rk} \ln \left( \frac{r}{R_{R_k}} \right) \right] \quad (31)$$

avec

$$\chi^{k,l} = \frac{j\sigma_{II}^{k,l} \omega_{rm} \mu_0}{4(1 - j\sigma_{II}^{k,l} \omega_{rm} \gamma_{k,l})} \quad (32)$$

où  $\{B_1^{k,l} \sim B_6^{k,l}\}$  sont les constantes d'intégrations dans le rotor.

À partir des CLs entre les différents domaines et régions, les constantes d'intégrations dans (22), (23) et (31) peuvent être déterminées en résolvant le système d'équations linéaires suivant :

$$M \cdot X = Y \quad (33)$$

avec

$$M = \begin{bmatrix} \Lambda^{11} & \Lambda^{12} & \Lambda^{13} \\ 0 & \Lambda^{22} & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda^{33} \\ \Lambda^{41} & \Lambda^{42} (\nu_{II}^{k,l}) & \Lambda^{43} (\nu_{III}^{k,l}) \\ 0 & \Lambda^{52} (\nu_{II}^{k,l}) & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda^{63} (\nu_{III}^{k,l}) \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$X = [a^{air} \quad b^{rotor} \quad c^{stator}]^T \quad (35)$$

$$Y = [\Gamma^1 \quad \Gamma^2 \quad \Gamma^3 \quad \Gamma^4 \quad \Gamma^5 \quad \Gamma^6] \quad (36)$$

$$a^{air} = [A1_0 \dots A1_N \quad A2_0 \dots A2_N \quad A3_1 \dots A3_N \quad A4_1 \dots A4_N] \in \Re^{(4N+2) \times 1} \quad (37)$$

$$b^{rotor} = [B_1^{1,1} \dots B_6^{1,1} \quad B_1^{1,2} \dots B_6^{1,2} \quad \dots \quad B_1^{K_r, L_r} \dots B_6^{K_r, L_r}] \in \Re^{(6K_r, L_r) \times 1} \quad (38)$$

$$c^{stator} = [C_1^{1,1} \dots C_6^{1,1} \quad C_1^{1,2} \dots C_6^{1,2} \quad \dots \quad C_1^{K_s, L_s} \dots C_6^{K_s, L_s}] \in \Re^{(6K_s, L_s) \times 1} \quad (39)$$

Il est à noter que  $\{\Lambda^{11}; \Lambda^{12}; \Lambda^{13}; \Lambda^{22}; \Lambda^{33}\}$ , correspondant aux CLs de  $A_z$ , sont indépendantes de la réductivité des

Tableau 1. Paramètres géométriques et physiques de la machine asynchrone à cage d'écureuil.

Symboles	Paramètres	Valeurs
$\sigma$	Conductivité électriques des barres rotoriques	35 MS/m
$\mu_{rm}$	Perméabilité relative du fer	100-600
$N_c$	Nombre de conducteurs par encoche	60
$I_m$	Courant RMS dans le bobinage statorique	18 A
$Q_s$	Nombre d'encoche statorique	24
$C$	Ouverture angulaire de l'encoche statorique	7,5 deg.
$c_r$	Ouverture angulaire de cale d'encoche statorique	2,5 deg
$A$	Ouverture angulaire de l'encoche rotorique	5,45 deg.
$a_r$	Ouverture angulaire de cale d'encoche rotorique	1,9 deg
$p$	Nombre de paires de pôles	2
$R_{ext}$	Rayon extérieur du stator	95 mm
$r_4$	Rayon extérieur d'encoche statorique	83 mm
$r_3$	Rayon intérieur d'encoche statorique	63 mm
$R_s$	Rayon intérieur du stator	61 mm
$R_r$	Rayon extérieur du rotor	60 mm
$r_2$	Rayon extérieur d'encoche rotorique	58 mm
$r_1$	Rayon intérieur d'encoche rotorique	48 mm
$R_{int}$	Rayon intérieur du rotor	20 mm
$G$	Épaisseur de l'entrefer	1 mm
$L_u$	Longueur axiale de la machine	63 mm

matériaux. Les autres sous-matrices, correspondant aux CLs de  $H_{//}$ , dépendent de la réductivité des matériaux (hormis  $\Lambda^{41}$ ). Le développement des CLs ainsi que les sous-matrices peuvent être trouvés dans [19]. Dans cet article, le cas d'une perméabilité constante a été traité. Néanmoins, il possible d'introduire l'algorithme itératif de Newton Raphson pour l'analyse non-linéaire du champ magnétique [19] en utilisant la courbe  $B(H)$  effective [21].

### 3. RESULTATS ET VALIDATIONS

#### 3.1. Performances électromagnétiques

La méthode semi-analytique développée est utilisée pour déterminer le champ magnétique dans toutes les régions de la machine, la densité surfacique de courant de Foucault induits dans les barres rotoriques et le couple électromagnétique. Les paramètres géométriques et physiques de la machine sont donnés dans le Tableau 1.

Les Figs. 3 ~ 5 représentent les différentes composantes de l'induction magnétique au milieu de l'entrefer pour différentes valeurs de la perméabilité relative du fer et du glissement (i.e.,  $\{\mu_r; s\} = \{100; 0,1\}, \{600; 0,1\}, \{600; 1\}$ ). Les résultats semi-analytiques sont très satisfaisants par rapport aux résultats numériques, en considérant l'amplitude et la forme d'onde. Le dégradé d'amplitude de l'induction magnétique et du vecteur potentiel magnétique à l'intérieur de la machine asynchrone à cage d'écureuil pour  $\{\mu_r; s\} = \{600; 0,1\}$  sont respectivement représentés dans les Figs. 6 ~ 7.

Les Figs. 8 ~ 9 représentent les courants de Foucault induits dans les barres rotoriques obtenus analytiquement et numériquement pour  $\{\mu_r; s\} = \{600; 0,1\}, \{600; 1\}$ . Les résultats semi-analytiques sont très satisfaisants par rapport aux résultats numériques.

Pour l'alimentation en tension, le fondamental du courant statorique (i.e., l'amplitude et le déphasage) peut être calculé en utilisant un circuit électrique équivalent [10]-[11]. Fig. 10 représente les caractéristiques électromagnétiques de la machine en fonction de glissement. On remarque que pour des valeurs de glissement inférieures à 0,1 les résultats sont en accord avec ceux obtenus par FEMM. Néanmoins, pour des valeurs élevées de glissement le modèle donne une erreur de 5% entre les courants obtenus analytiquement et numériquement. Bien entendu, cette erreur est également obtenue pour les résultats du couple. Cette erreur est due à la prise en compte des courants de Foucault induits dans les barres du rotor en tant que constantes.

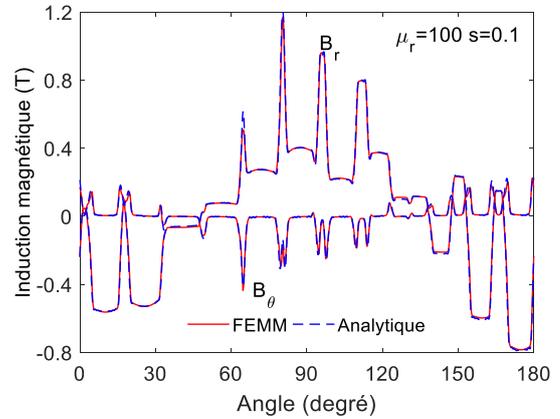


Fig. 3. Composante  $r$  et  $\theta$  de l'induction magnétique au milieu de l'entrefer pour  $\mu_r = 100$  et  $s = 0,1$ .

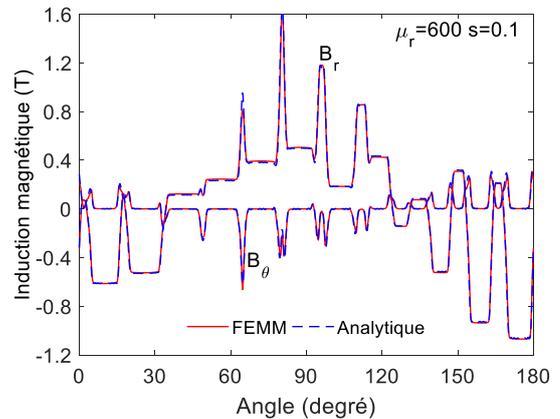


Fig. 4. Composante  $r$  et  $\theta$  de l'induction magnétique au milieu de l'entrefer pour  $\mu_r = 600$  et  $s = 0,1$ .

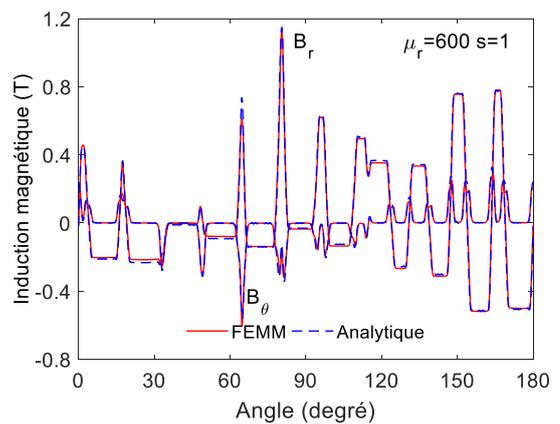


Fig. 5. Composante  $r$  et  $\theta$  de l'induction magnétique au milieu de l'entrefer pour  $\mu_r = 600$  et  $s = 1$ .

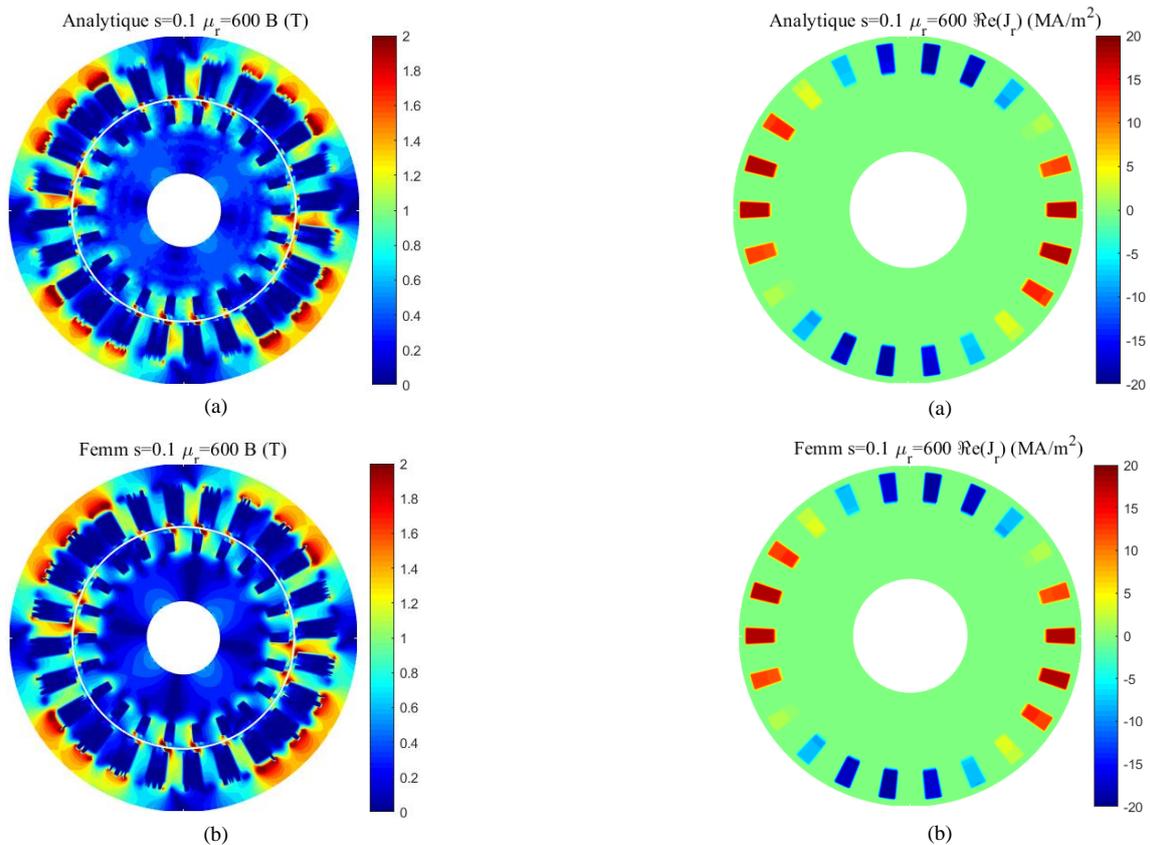


Fig. 6. Degradé d'induction magnétique à l'intérieur de la machine pour  $\mu_r = 600$  et  $s = 0,1$  : (a) Analytique et (b) FEMM.

Fig. 8. Densité surfacique de courant de Foucault induits dans les barres rotoriques pour  $\mu_r = 600$  et  $s = 0,1$  : (a) Analytique et (b) FEMM.

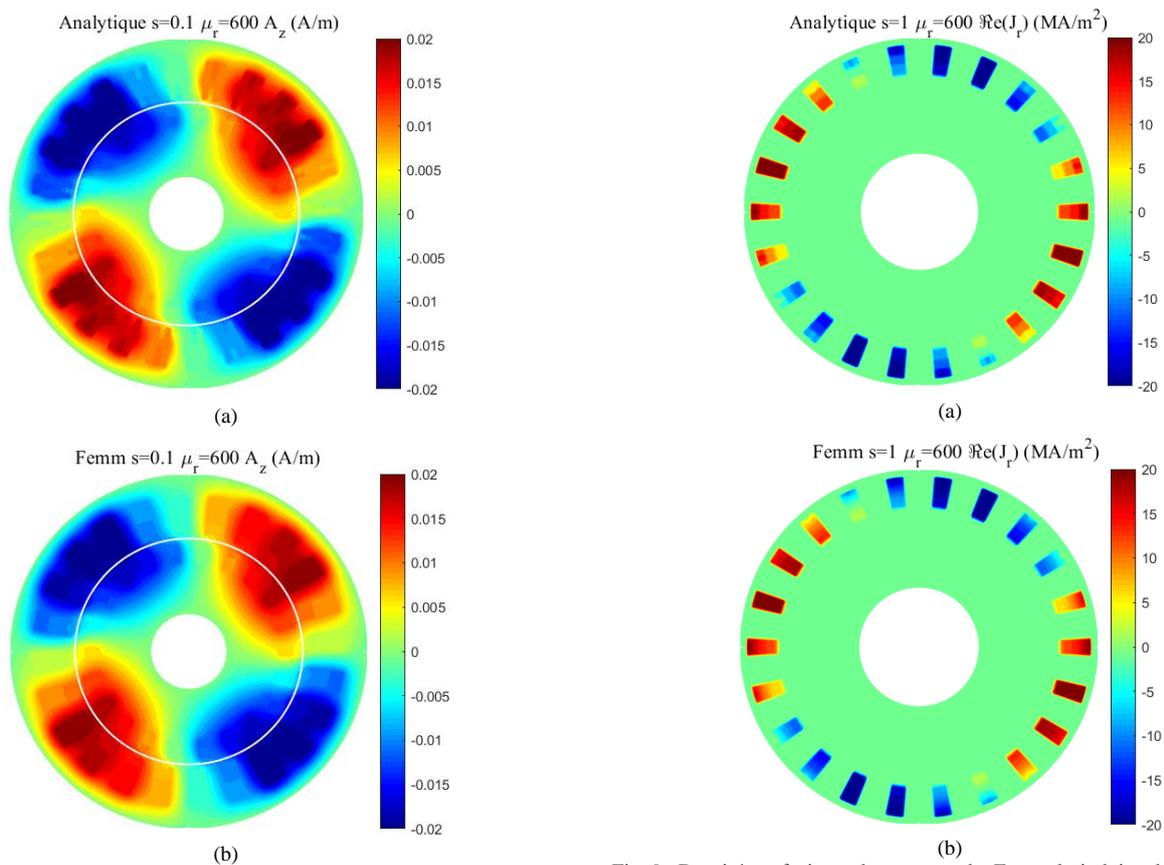


Fig. 7. Degradé du vecteur potentiel magnétique à l'intérieur de la machine pour  $\mu_r = 600$  et  $s = 0,1$  : (a) Analytique et (b) FEMM.

Fig. 9. Densité surfacique de courant de Foucault induits dans les barres rotoriques pour  $\mu_r = 600$  et  $s = 1$  : (a) Analytique et (b) FEMM.

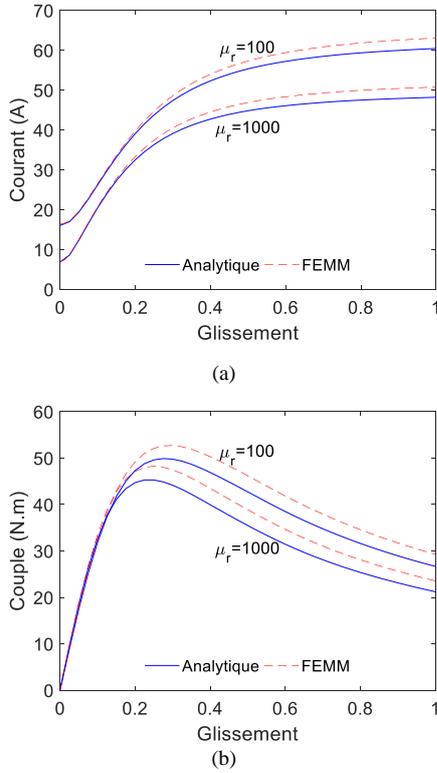


Fig. 10. Caractéristiques électromagnétique de la machine pour  $\mu_r = 100$  et  $\mu_r = 1000$  en fonction du glissement : (a) Courant statorique et (b) Couple électromagnétique.

Tableau 2. Temps de calcul, précision et dimension du système.

		$M$	12522	9882	7378	5746	5170
$\mu_r$	$s$	Temps (min)	3,1	1,56	0,62	0,31	0,23
100	0,1	$E_B$ (%)	4,15	4,2	4,18	4,23	4,28
		$E_r$ (%)	0,9	0,93	1,69	2,02	1,98
	1	$E_B$ (%)	5,17	5,94	6,51	9,9	10,04
		$E_r$ (%)	1,87	2,13	4,02	7,11	7,21
1000	0,1	$E_B$ (%)	4,19	4,18	4,5	6,72	6,68
		$E_r$ (%)	1,1	1,17	2,01	4,9	4,77
	1	$E_B$ (%)	6,2	6,42	7,33	10,9	10,92
		$E_r$ (%)	0,63	0,69	2,04	6,73	6,64

### 3.2. Limite du modèle – Taille, précision et temps de calcul

Un point très important devrait être traité concernant la limite d'utilisation du modèle semi-analytique par rapport au modèle numérique d'un point de vue précision et temps de calcul. Il est clair que la considération des harmoniques de courant de Foucault induits dans les barres rotoriques [12], pour l'étude de régime permanent pour glissement donné, donne un avantage très important par rapport au modèle numérique d'un point de vue temps de calcul, à cause du temps de calcul de régime transitoire consommé par le modèle numérique. Néanmoins, une comparaison entre le modèle proposé et le modèle numérique magnéto-harmonique a été faite.

La précision dans le modèle développé est liée à la taille des SDs-E. Ce paramètre peut être traité en termes de dimension de la matrice  $M$  du système linéaire (33). Le Tableau 2 représente

l'erreur relative entre le modèle semi-analytique et numérique en fonction de la taille de la matrice  $M$  et du temps de calcul. L'erreur relative est représentée en termes de l'induction magnétique au milieu de l'entrefer et du couple électromagnétique. Ces erreurs sont calculées :

$$E_B (\%) = \frac{RMS(\mathbf{B}_T^{Num} - \mathbf{B}_T^{Ana})}{RMS(\mathbf{B}_T^{Num})} \quad (40)$$

$$E_r (\%) = \frac{|\Gamma^{Num} - \Gamma^{Ana}|}{|\Gamma^{Num}|} \quad (41)$$

Les résultats numériques du champ magnétique sont calculés avec 185341 nœuds et 369262 éléments donnant un temps de calcul égal à 2,26 min. Le Tableau 2 montre que le modèle semi-analytique donne de bons résultats pour une taille de matrice  $M$  élevée, mais avec un temps de calcul proche de celui de FEMM. Néanmoins, pour des valeurs faibles de glissement (e.g.,  $s = 0,1$ ), le vecteur potentiel magnétique n'est pas si déformé. Ceci aboutit à l'approximation de la considération d'une seule harmonique dans les SDs-E sans mailler le rotor et le stator en éléments très fins. L'erreur obtenue est respectivement autour de 6 % et de 4 % pour l'induction magnétique et le couple avec un temps de calcul inférieur à 0,3 min.

## 4. CONCLUSION

Dans ce papier, un modèle semi-analytique des machines asynchrones à cage d'écureuil en considérant la saturation magnétique locale et les courants de Foucault induits dans les barres rotoriques est présenté. La modélisation développée est basée sur la technique en SDs-E dont l'hypothèse principale est que la variation du potentiel vecteur magnétique n'est pas importante dans les SDs-E. Ces SDs-E sont connectés dans les deux directions (i.e., selon les bords  $r$  et  $\theta$ ). Le modèle semi-analytique a été validé pour différentes valeurs de la perméabilité relative du fer et du glissement. Les résultats sont en excellente concordance avec ceux obtenus par FEMM.

Dans le cas où le potentiel vecteur magnétique est très déformé, l'obtention de résultats acceptables nécessite de mailler le rotor et le stator en SDs-E très fins, ce qui augmente le temps de calcul. Par conséquent, une optimisation de l'implémentation de ce modèle est proposée aux chercheurs, soit en focalisant sur la taille optimale des SDs-E ou sur la solution proposée dans les SDs-E afin de minimiser le nombre des constants d'intégrations.

Pour des raisons de programmation, toutes les régions du rotor et du stator sont maillées ce qui conduit à des CLs entre des SDs-E avec les mêmes périodes spatiales. Cependant, les encoches statoriques sont des régions homogènes et le fait de les considérer sans maillage et de les associer par des nombres harmoniques élevés conduit à des résultats plus précis. Il en est de même pour les barres rotoriques, néanmoins, il faudrait déterminer la période spatiale des fonctions Bessel pour connecter les SDs-E selon les bords  $r$ . Pour satisfaire ces CLs, il est possible aussi d'utiliser le développement en série de Taylor comme dans [16].

## 5. REFERENCES

- [1] F. Dubas, and C. Espanet, "Analytical solution of the magnetic field in permanent-magnet motors taking into account slotting effect: No-load vector potential and flux density calculation," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 45, no. 5, pp. 2097-2109, May 2009.
- [2] E. Devillers, J. Le Besnerais, T. Lubin, M. Hecquet, and J.P. Lecointe, "A review of subdomain modeling techniques in electrical machines:

Performances and applications,” in *Proc. ICEM*, Lausanne, Switzerland, 04-07 Sep., 2016.

- [3] H. Tiegna, Y. Amara, and G. Barakat, “Overview of analytical models of permanent magnet electrical machines for analysis and design purposes,” *Math. Comp. Simul.*, vol. 90, pp. 162-177, Apr. 2013.
- [4] M. Curti, J.J.H. Paulides, and E.A. Lomonova, “An overview of analytical methods for magnetic field computation,” in *Proc. EVER*, Grimaldi Forum, Monaco, 31 Mar./02 Apr., 2015.
- [5] F. Dubas, and K. Boughrara, “New scientific contribution on the 2-D subdomain technique in Cartesian coordinates: Taking into account of iron parts,” *Math. Comput. Appl.*, vol. 22, no. 1, p. 17, Feb. 2017, DOI: 10.3390/MCA22010017.
- [6] R.L.J. Sprangers, J.J.H. Paulides, B.L.J. Gysen, and E.A. Lomonova, “Magnetic saturation in semi-analytical harmonic modeling for electric machine analysis,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 52, no. 2, Feb. 2016, Art. ID 8100410.
- [7] F. Dubas, and A. Rahideh, “A 2-D analytical PM eddy-current loss calculations in slotless PMSM equipped with surface-inset magnets,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 50, no. 3, Mar. 2014, Art. ID 6300320.
- [8] P-D. Pfister, X. Yin, and Y. Fang, “Slotted permanent-magnet machines: General analytical model of magnetic fields, torque, eddy currents, and permanent-magnet power losses including the Diffusion effect,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 52, no. 5, May 2016, Art. ID 8103013.
- [9] T. Lubin, S. Mezani, and A. Rezzoug, “Analytic calculation of eddy currents in the slots of electrical machines: Application to cage rotor induction motors,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 47, no. 11, pp. 4650-4659, Nov. 2011.
- [10] K. Boughrara, N. Takorabet, R. Ibtouen, O. Touhami, and F. Dubas, “Analytical analysis of cage rotor induction motors in healthy, defective, and broken bars conditions,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 51, no. 2, Feb. 2015, Art. ID 8200317.
- [11] L. Roubache, K. Boughrara, and R. Ibtouen, “Analytical electromagnetic analysis of multi-phases cage rotor induction motors in healthy, broken bars and open phases conditions,” *Progress In Electromagnetics Research B*, vol. 70, pp. 113-130, Oct. 2016.
- [12] E. Devillers, J. Le Besnerais, T. Lubin, M. Hecquet, and J-P. Lecoq, “An improved 2-D subdomain model of squirrel-cage induction machine including winding and slotting harmonics at steady state,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 54, no. 2, Feb. 2018, Art. ID 8100612.
- [13] K. Boughrara, F. Dubas, and R. Ibtouen, “2-D analytical prediction of eddy currents, circuit model parameters, and steady-state performances in solid rotor induction motors,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 50, no. 12, Dec. 2014, Art. ID 7028214.
- [14] P. Liang, F. Chai, Y. Li, and Y. Pei, “Analytical prediction of magnetic field distribution in spoke-type permanent-magnet synchronous machines accounting for bridge saturation and magnet shape,” *IEEE Trans. Ind. Elect.*, vol. 64, no. 5, pp. 3479-3488, May 2017.
- [15] F. Dubas, and K. Boughrara, “New scientific contribution on the 2-D subdomain technique in polar coordinates: Taking into account of iron parts,” *Math. Comput. Appl.*, vol. 22, no. 4, p. 42, Oct. 2017, DOI: 10.3390/mca22040042.
- [16] L. Roubache, K. Boughrara, F. Dubas, and R. Ibtouen, “Semi-analytical modeling of spoke-type permanent-magnet machines considering the iron core relative permeability: Subdomain technique and Taylor polynomial,” *Progress In Electromagnetics Research B*, vol. 77, pp. 85-101, Jul. 2017.
- [17] L. Roubache, K. Boughrara, F. Dubas, and R. Ibtouen, “Semi-analytical modeling of spoke-type permanent-magnet machines considering nonlinear magnetic saturation: Subdomain technique and Taylor polynomial,” *Math. Comp. Simul.*, 2017, **Under review**.
- [18] L. Roubache, K. Boughrara, F. Dubas, and R. Ibtouen, “New subdomain technique for electromagnetic performances calculation in radial-flux electrical machines considering finite soft-magnetic material permeability,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 54, no. 4, Apr. 2018, Art. ID 8103315.
- [19] L. Roubache, K. Boughrara, F. Dubas, and R. Ibtouen, “Elementary subdomain technique for magnetic field calculation in rotating electrical machines with local saturation effect,” *COMPEL*, 2017, **Under review**.
- [20] D.C. Meeker. (Apr. 1, 2009). Finite Element Method Magnetics ver. 4.2. [Online]. Available: <http://www.femm.info>.
- [21] G. Paoli, O. Biro, and G. Buchgraber, “Complex representation in nonlinear time harmonic eddy current problems,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 34, no. 5, pp. 2625-2628, Sep. 1998.