

# Modélisation adiabatique d'un moteur Stirling avec pertes.

Issam BOUZINE, François LANZETTA\*, Sylvie BEGOT, Steve DJETEL-GOTHE, Philippe NIKA

Institut FEMTO-ST, CNRS, Univ. Bourgogne Franche-Comte  
Département ENERGIE, Parc technologique, 2 avenue Jean Moulin – 90000 Belfort

\*(auteur correspondant : [francois.lanzetta@ubfc.fr](mailto:francois.lanzetta@ubfc.fr))

**Résumé** - Nous avons développé un modèle adiabatique du 2<sup>ème</sup> ordre avec pertes afin d'établir les performances théoriques d'un moteur Stirling de type Bêta (travaux et puissances mécaniques et thermiques, rendement) qui sont comparées aux données expérimentales du moteur GPU-3 conçu par General Motors. Les pertes incluent les échanges thermiques et pertes de charge au niveau des échangeurs, l'efficacité du régénérateur, les pertes thermiques par conduction dans les parois, les effets d'hystérésis dans le gaz, les effets navette aux extrémités du déplaceur et les fuites de gaz.

## Nomenclature

|                       |  |                             |   |
|-----------------------|--|-----------------------------|---|
| <i>A</i>              | surface, $m^2$                             | <i>Indices et exposants</i> |   |
| <i>C</i>              | chaleur spécifique, $J.kg^{-1}.K^{-1}$     | <i>c</i>                    | volume de compression                           |
| <i>D</i>              | différentielle par rapport au temps (d/dt) | <i>ck</i>                   | frontière échangeur froid/volume de compression |
| <i>Dh</i>             | diamètre hydraulique, $m$                  | <i>e</i>                    | volume de détente                               |
| <i>k</i>              | conductivité thermique, $W.m^{-1}.K^{-1}$  | <i>fr</i>                   | frottements                                     |
| <i>L</i>              | longueur, $m$                              | <i>g</i>                    | gaz   |
| <i>m</i>              | masse, $kg$                                | <i>h</i>                    | échangeur chaud                                 |
| <i>ṁ</i>              | débit massique, $kg.s^{-1}$                | <i>he</i>                   | frontière échangeur chaud/volume de détente     |
| <i>NUT</i>            | Nombre d'Unités de Transfert               | <i>ideal</i>                | analyse adiabatique idéal                       |
| <i>P</i>              | pression, $Pa$                             | <i>irr</i>                  | irréversible                                    |
| <i>Pr</i>             | nombre de Prandtl                          | <i>k</i>                    | échangeur froid                                 |
| <i>Re</i>             | nombre de Reynolds                         | <i>kr</i>                   | frontière régénérateur/échangeur froid          |
| <i>St</i>             | nombre de Stanton                          | <i>leak</i>                 | fuite de gaz                                    |
| <i>T</i>              | température, $K$                           | <i>loss</i>                 | pertes  |
| <i>u</i>              | vitesse, $m.s^{-1}$                        | <i>r</i>                    | régénérateur                                    |
| <i>V</i>              | volume, $m^3$                              | <i>rh</i>                   | frontière régénérateur/volume de détente        |
| <i>Q</i>              | quantité d'énergie, $J$                    | <i>p</i>                    | à pression constante                            |
| <i>W</i>              | travail, $J$                               | <i>shuttle</i>              | effet navette                                   |
| <i>Symboles grecs</i> |  | <i>v</i>                    | à volume constant                               |
| $\alpha$              | diffusivité thermique, $m^2.s^{-1}$        | <i>w</i>                    | toile métallique                                |
| $\varepsilon$         | efficacité                                 |                             |   |
| $\Delta$              | différence                                 |                             |   |
| $\gamma$              | coefficient adiabatique du gaz,            |                             |   |
| $\mu$                 | viscosité dynamique, $Pa.s$                |                             |   |
| $\omega$              | vitesse angulaire, $rad.s^{-1}$            |                             |   |

## 1. Introduction

Les moteurs Stirling sont des moteurs à apport de chaleur externe dont les applications sont multiples. Elles concernent la valorisation des chaleurs fatales en vue de produire de l'électricité, le transport terrestre et maritime, l'hybridation de moteurs thermiques, la cogénération pour l'habitat. En mode récepteur, la machine Stirling peut être utilisée en pompe à chaleur, pour la production de froid et la cryogénie. La modélisation des moteurs

Stirling utilise des modèles de différents ordres : ordre zéro (modèles de Beale [1] et West [2]), ordre un (modèle isotherme de Schmidt [3][4] et Schmidt Beans [5]), ordre deux (modèles d'Urieli [3][6]), ordre trois (simulation par CFD [7][8][9][10]). Dans cet article nous étudions un moteur Stirling de type Bêta à partir d'un modèle adiabatique du deuxième ordre avec pertes thermiques et fluidiques. Les pertes incluent ainsi les échanges thermiques et pertes de charge au niveau des échangeurs, l'efficacité du régénérateur, les pertes thermiques par conduction dans les parois, les phénomènes d'hystérésis dans le gaz, les effets navette aux extrémités du déplaceur et les fuites de gaz. Le modèle permet ainsi d'établir les performances théoriques du moteur (travaux et puissances mécaniques et thermiques, rendement) qui sont comparées aux données expérimentales du prototype conçu par General Motors GPU-3.

## 2. Analyse d'ordre deux

### 2.1. Modèle adiabatique idéal d'Urieli

Cette méthode utilise une approche de résolution numérique des équations dynamiques du gaz pour de petits volumes. Le principe est de diviser le volume du moteur en un certain nombre de volumes de contrôle et de leur appliquer les équations de conservation de la quantité de mouvement du gaz associée à son équation d'état. Les propriétés du gaz sont considérées uniformes dans chaque volume de contrôle. L'interaction entre les volumes est prise en compte lors de la résolution des équations différentielles qui se fait simultanément. La complexité du système à résoudre et le temps de calcul dépendent des hypothèses retenues.

Urieli s'est basé sur les travaux de Schmidt pour développer un modèle dit adiabatique [3][6]. Dans ce modèle, la machine Stirling est découpée en cinq volumes de contrôle dont deux variables (Fig. 1) : compression et détente. Les volumes des échangeurs froid et chaud et du régénérateur sont considérés constants. Les hypothèses retenues sont les suivantes :

- les transformations thermodynamiques de compression et de détente sont adiabatiques,
- la pression du gaz est uniforme dans toute la machine,
- le mouvement du piston et du déplaceur est sinusoïdal,
- le fluide de travail suit la loi des gaz parfaits,
- la vitesse de rotation de la machine est constante.

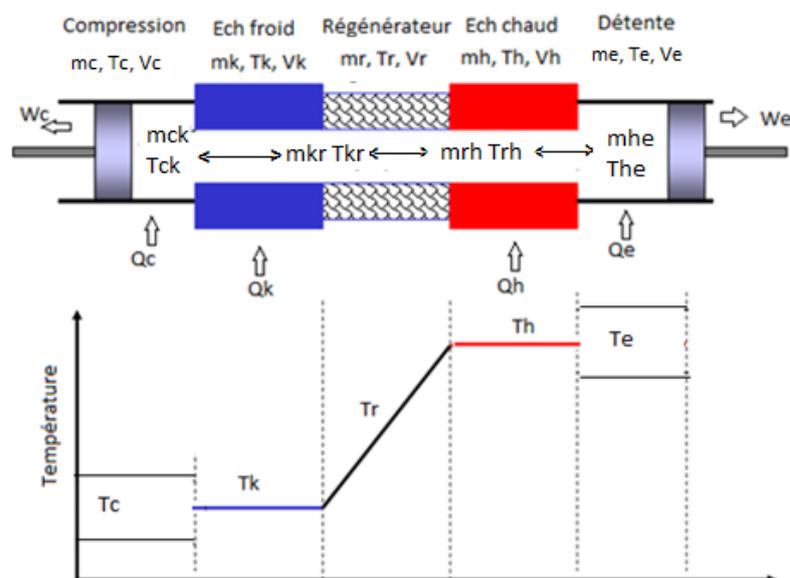


Figure 1: Modèle adiabatique idéal d'Urieli [3]

Le tableau 1 synthétise les 21 équations résultantes dont six intégrables concernant la pression, la masse dans la chambre de compression, le travail et les quantités de chaleur. La pression et la masse doivent être résolues simultanément car elles sont indépendantes l'une à l'autre, les équations d'énergie peuvent être résolues par une intégration numérique. Un tel système d'équations différentielles peut être résolu par une méthode numérique telle que la méthode de Runge-Kutta à l'ordre 4.

## 2.2. Modèle adiabatique FEMTO avec pertes.

Urieli a complété son modèle idéal en intégrant des pertes au niveau du régénérateur et des échangeurs chaud et froid [3][11]. Nous avons adapté ce modèle en intégrant les pertes (Tab. 2) : de charge [3], par hystérésis [11][12], par conduction entre la source chaude et le puits froid (parois) [12][13], au sein du régénérateur [13][14], par effet navette [12][13], et les fuites de gaz [12][14]. Une grande partie de la quantité de chaleur fournie à la tête chaude se dissipe dans le régénérateur et dans l'échangeur froid, le reste est transformé en travail mécanique.

| Grandeurs déterminées et conditions | Equations   |
|-------------------------------------|---|
| Pression                            | $DP = \frac{-\gamma P \left( \frac{DV_c}{T_{ck}} + \frac{DV_e}{T_{he}} \right)}{\frac{V_c}{T_{ck}} + \gamma \left( \frac{V_k}{T_k} + \frac{V_r}{T_r} + \frac{V_h}{T_h} \right) + \frac{V_e}{T_{he}}} \quad (1)$ |
| Masses                              | $Dm_c = (PDV_c + \frac{V_c DP}{\gamma}) / (RT_{ck}) \quad (2)$  |
|                                     | $m_k = PV_k / (RT_k) ; m_r = PV_r / (RT_r) \quad (3)$   |
|                                     | $m_h = PV_h / (RT_h) ; m_e = PV_e / (RT_e) \quad (4)$   |
| Températures                        | $T_c = PV_c / (Rm_c) ; T_e = PV_e / (Rm_e) \quad (5)$   |
| Débit massiques                     | $Dm_k = m_k \frac{DP}{P} \quad Dm_r = m_r \frac{DP}{P} \quad Dm_h = m_h \frac{DP}{P} \quad (6a,b,c)$  |
|                                     | $\dot{m}_{ck} = -Dm_c \quad \dot{m}_{kr} = \dot{m}_{ck} - Dm_k \quad (7a,b)$  |
|                                     | $\dot{m}_{rh} = \dot{m}_{kr} - Dm_r \quad \dot{m}_{he} = \dot{m}_{rh} - Dm_h \quad (8a,b)$  |
| Conditions de températures          | $\text{Si } \dot{m}_{ck} > 0 \text{ alors } T_c \rightarrow T_{ck}. \text{ Sinon } T_k \rightarrow T_{ck}. \quad (9a,b)$  |
|                                     | $\text{Si } \dot{m}_{he} > 0 \text{ alors } T_h \rightarrow T_{he}. \text{ Sinon } T_e \rightarrow T_{he}. \quad (10a,b)$   |
| Puissances                          | $DW = PDV_c + PDV_e \quad (11)$   |
|                                     | $DQ_k = V_k DP \frac{C_v}{R} - C_p (\dot{m}_{ck} T_{ck} - \dot{m}_{kr} T_{kr}) \quad (12)$  |
|                                     | $DQ_r = V_r DP \frac{C_v}{R} - C_p (\dot{m}_{kr} T_{kr} - \dot{m}_{rh} T_{rh}) \quad (13)$  |
|                                     | $DQ_h = V_h DP \frac{C_v}{R} - C_p (\dot{m}_{rh} T_{rh} - \dot{m}_{he} T_{he}) \quad (14)$  |

Tableau 1: Système d'équations du modèle Stirling idéal (les dérivées temporelles des grandeurs physiques sont écrites de façon contractée et D représente ainsi d/dt)

Le bilan énergétique du moteur devient alors :

$$Q_h = Q_{hideal} + Q_{cond} + Q_{rloss} + Q_{shuttle} \quad (15)$$

$$W = W_{ideal} - W_{fr} - W_{irr} - W_{leak} \quad (16)$$

$$Q_k = Q_{kideal} + Q_{cond} + Q_{rloss} + Q_{shuttle} + W_{fr} + W_{irr} + W_{leak} \quad (17)$$

$Q_{hideal}$ ,  $Q_{kideal}$  et  $W_{ideal}$  font références aux quantités de chaleur et au travail de l'analyse adiabatique idéale.

| Pertes thermiques et fluidiques  | Equations   |
|--|---|
| Conduction thermique entre le long des parois en la source chaude et le puits froid (régime permanent) | $Q_{cond} = kA \frac{\Delta T}{\Delta x} \quad (18)$  |
| Régénérateur   | $Q_{rloss} = Q_r(1 - \varepsilon) ; \varepsilon = \frac{NUT}{1+NUT} ;$<br>$NUT = St A_w / (2A) ; St = 0.46Re^{-0.4} / Pr \quad (19a,b,c,d)$ |
| Effet navette au niveau du déplaceur   | $Q_{shuttle} = \frac{\pi k_g D_{din} S_d^2}{4 L_d \delta} (T_e - T_c) \quad (20)$   |
| Pertes de charge (frottements visqueux)  | $\Delta P = \frac{-2 f_{Re} \mu u V}{D h^2 A} \quad (21a,b)$<br>$W_{fr} = \Delta P dV_e$  |
| Hystérésis du gaz  | $W_{irr} \cong \frac{k}{4} \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}} \gamma(\gamma - 1) T_w A_w \left( \frac{\Delta V}{V_b} \right)^2 \quad (22)$       |
| Fuites de gaz (débit massique et puissance correspondante)   | $m_{leak} = \pi D_{cin} \frac{P + P_b}{2RT} \left( u_p c + \frac{2c^3 P - P_b}{3\mu L} \right) \quad (23a,b)$<br>$W_{leak} = m_{leak} CpT$  |

Tableau 2: Bilan de pertes de quantité de chaleur et de travail dans le modèle analytique

### 3. Validation du modèle adiabatique avec pertes sur le moteur GPU3

#### 3.1. Comparaison des modèles théoriques

Le moteur Ground Power Unit GPU-3 est un moteur Stirling de type bêta développé par le laboratoire de recherche de General Motors pour le profit de l'armée américaine en 1965 [15]. La machine est capable de produire une puissance maximale de 7.5 kW en utilisant l'hydrogène comme gaz de travail sous une pression de charge de 69 bar. Ce moteur a été testé par le centre de recherche Lewis NASA (National Aeronautics and Space Administration) qui a défini les caractéristiques géométriques de la machine avec son fonctionnement optimal (Tab. 3).

La plupart des modèles du second ordre donnent des résultats proches des essais expérimentaux, y compris le modèle simple avec les différentes pertes. La quantité de chaleur fournie et la puissance récupérée à l'arbre sont légèrement surdimensionnées par rapport aux autres modèles et aux essais expérimentaux, cette différence est due au programme de base

établi par Urieli et disponible sur le site de l'université d'Ohio [6]. Ce programme ne révèle pas les mêmes résultats disponibles dans la littérature [3]. Le rendement thermodynamique est assez proche du rendement expérimental, la démarche de calcul est similaire à celle suivie par Timoumi [12] et Ni [13], la différence concerne les lois empiriques prises en compte pour l'évaluation des différentes pertes dans la machine.

| Paramètres            | Valeurs                | Paramètres            | Valeurs               |
|-----------------------|------------------------|-----------------------|-----------------------|
| Volumes balayés       |                        | Volumes morts         |                       |
| Espace de compression | 113.14 cm <sup>3</sup> | Espace de compression | 28.68 cm <sup>3</sup> |
| Espace de détente     | 120.82 cm <sup>3</sup> | Espace de détente     | 30.52 cm <sup>3</sup> |
| Tête chaude           |                        | Refroidisseur         |                       |
| Nombre de tubes       | 40                     | Nombre de tubes       | 312                   |
| Diamètre des tubes    | 3.02 mm                | Diamètre des tubes    | 1.08 mm               |
| Longueur des tubes    | 245.3 mm               | Longueur des tubes    | 46.1 mm               |
| Volume mort           | 70.88 cm <sup>3</sup>  | Volume mort           | 13.8 cm <sup>3</sup>  |
| Régénérateur          |                        | Pression              |                       |
| Diamètre              | 22.6 mm                | Température chaude    | 977 K                 |
| Longueur              | 22.6 mm                | Température froide    | 288 K                 |
| Diamètre du fil       | 40 µm                  | Gaz                   | Helium                |
| Porosité              | 0.697                  | Masse du gaz          | 1.136 g               |
| Volume mort           | 50.55 cm <sup>3</sup>  | Fréquence             | 41.7 Hz               |

Tableau 3: Caractéristiques du moteur GPU-3 [15]

Les résultats expérimentaux des différents essais de ce moteur ont été comparés aux modèles analytiques du deuxième ordre, il est considéré comme une référence pour la validation de chaque modèle de calcul dédié aux moteurs Stirling.

| Modèles   | Puissance thermique fournie (W) | Puissance mécanique récupérée (W) | Rendement thermodynamique (%) |
|---|---------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------|
| Modèle isotherme idéal d'Urieli et Berchowitz [3]         | 10556                           | 7442                              | 70.5                          |
| Modèle adiabatique idéal d'Urieli et Berchowitz [3]       | 13280                           | 8300                              | 62.5                          |
| Modèle adiabatique avec pertes d'Urieli et Berchowitz [3] | 12762                           | 6700                              | 52.5                          |
| <b>Modèle adiabatique FEMTO avec pertes (Section 2.2)</b> | <b>14858</b>                    | <b>6240</b>                       | <b>42</b>                     |
| Résultats expérimentaux [15]                              | 11309                           | 3958                              | 35                            |

Tableau 3: Comparaison des différents modèles analytiques du second ordre avec les résultats expérimentaux

Les pertes de puissance sont converties en chaleur et évacuées à travers l'échangeur froid. La chute de pression causée par les frottements dans le régénérateur et les échangeurs absorbe une grande partie d'énergie non convertie en travail mécanique. Un grand pourcentage des pertes est dû à l'inefficacité du régénérateur que l'on n'arrive pas à quantifier avec exactitude à cause de la complexité de sa géométrie et de l'échange thermique entre le gaz et la paroi du

régénérateur. Les fuites du gaz entraînent une baisse du travail mécanique récupéré, les pertes par navette du déplaceur et par hystérésis du gaz ont moins d'impact sur le bilan de puissance de la machine.

### 3.2. Comparaison du modèle avec les résultats expérimentaux

Des essais expérimentaux ont été réalisés dans le centre Lewis NASA et sont disponibles dans la littérature [15]. La figure 2 compare la puissance récupérée pour une machine fonctionnant avec de l'Hélium entre 922 K et 288 K sous deux pressions différentes 41.4 bar et 27.6 bar.

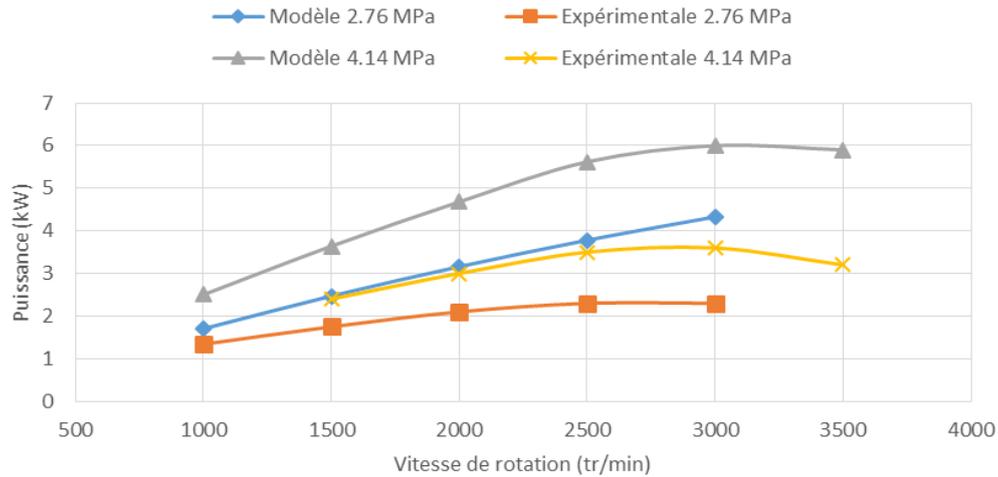


Figure 1 : Variation de la puissance en fonction du régime du moteur (Hélium 922 K / 288 K)

Le modèle présente des puissances légèrement plus grandes que celles des essais expérimentaux, notamment pour de grandes vitesses. La puissance maximale est atteinte entre 2500 tr/min et 3000 tr/min. On mentionne que le modèle donne des puissances supérieures à celles mentionnées dans la littérature des modèles développés par Urieli [3][6], ceci est valable pour les analyses isothermes, les analyses adiabatiques idéales et avec pertes. La figure 3 représente la variation du rendement thermodynamique pour les mêmes essais (Hélium 922 K / 288 K).

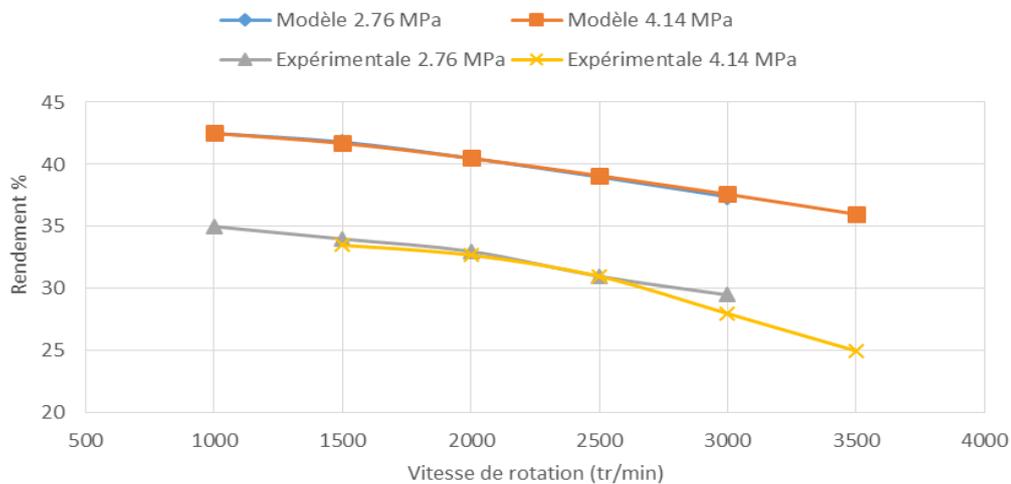


Figure 3 : Variation du rendement thermodynamique en fonction du régime du moteur (Hélium 922 K / 288 K)

A faible vitesse de rotation, le moteur permet d'avoir des rendements assez élevés (35 % en essai réel et 42 % en théorique). En augmentant la vitesse, le rendement baisse pour les différentes pressions du fait de l'augmentation des pertes de charges notamment. La différence entre le modèle et l'expérimental est de l'ordre de 7 % à 10 % de rendement thermodynamique.

D'autres essais ont été réalisés avec de l'Hydrogène entre 977 K et 288 K sous deux pressions de 13.8 bar et 27.6 bar. Le modèle surestime les valeurs expérimentales de puissance et de rendement (Fig. 4 et Fig.5).

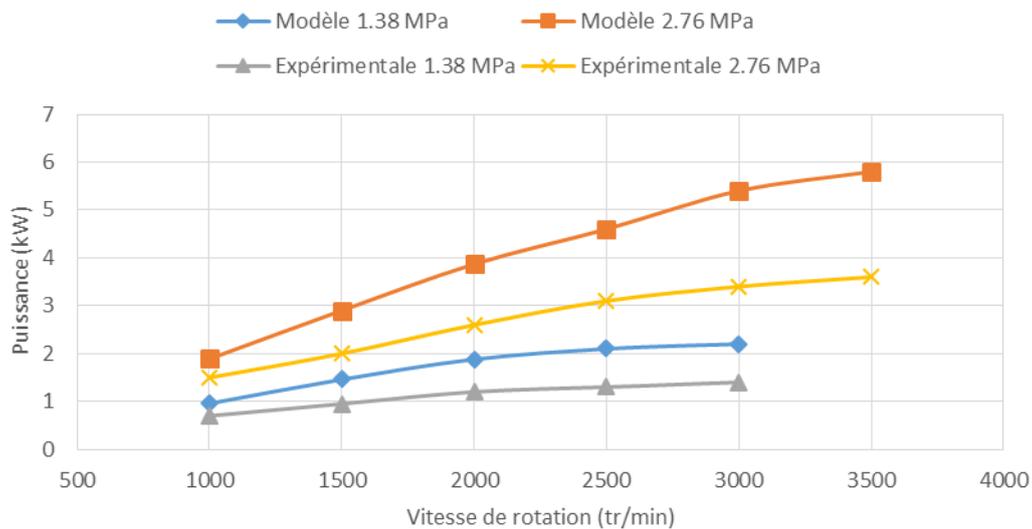


Figure 4 : Variation de la puissance en fonction du régime du moteur (Hydrogène 977 K / 288 K)

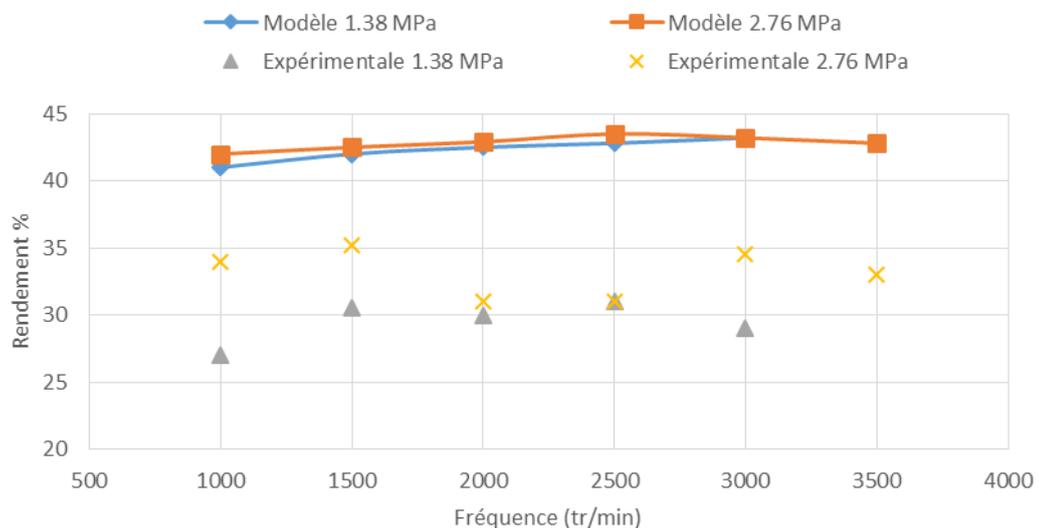


Figure 5 : Variation du rendement thermodynamique en fonction du régime du moteur (Hydrogène 977 K / 288 K)

Pour la même pression de 27.6 bar, le fonctionnement avec l'hélium présente des rendements meilleurs comparés à ceux avec de l'hydrogène. En montant en pression et avec un gradient de température plus grand, le fonctionnement de la machine s'améliore, cependant la contrainte des matériaux et leur tenue mécanique empêche d'appliquer de grandes variables et de monter en puissance.

## 4. Conclusion

La modélisation théorique des machines Stirling montre des performances, en termes de puissance et de rendement, plus élevées que les performances réelles. Le but de ce travail est de développer un modèle théorique en intégrant les pertes thermiques et fluidiques au sein des différents volumes afin de se rapprocher le plus possible des performances réelles. Le modèle a été validé sur le moteur GPU-3. La puissance mécanique et le rendement thermodynamique s'approchent des essais expérimentaux disponibles dans la littérature. Concernant le modèle réalisé, plusieurs améliorations peuvent être apportées dans une prochaine étude telles que les calculs des pertes qui se fait en moyenne sur la totalité du cycle. Il serait plus convenable de les calculer à chaque pas de calcul (ou de temps). Ce pas de calcul qui est de 10° d'angle de rotation pourrait être réduit pour obtenir un nombre de points plus grand.

## Références

- [1] W. Beale, *Understanding Stirling engine*, Volunteers in Technical Assistance, (1984)
- [2] C.D. West, *Principles and applications of Stirling engine*, Van Nostrand Reinhold Co, New York, (1986).
- [3] I. Urieli et D.M. Berchowitz, *Stirling Cycle Engine analysis*, Taylor & Francis, (1984).
- [4] G. Schmidt, The Theory of Lehmann's Calorimetric Machine, Z. ver. Dtsch. Ing. 15 part I, (1871).
- [5] E.W. Beans, *A mathematical model for the Stirling engine*, Trans. of the ASME, J. Eng. for Power, 103, July, (1981), 505-510.
- [6] I. Urieli, «Stirling Cycle Machine Analysis,» 2010.  
[En ligne]: <https://www.ohio.edu/mechanical/stirling/> [Accès le 15 janvier 2017].
- [7] M.B. Ibrahim, Z. G. Zhang, R.C. Tew Jr, D. Gedeon, D. and T.W. Simon, (2001). *CFD modeling of free-piston Stirling engines*, NASA/TM, 211132, (2001).
- [8] C. Lin, W.X. Zhou, X. Chen and Z. Zhi Guo, *Improve the free-piston Stirling engine design with high order analysis method*, *Applied Mechanics and Materials*. Vol. 44. Trans Tech Publications, (2011), 1991-1995.
- [9] V. Pistek et P. Novotny, «CFD Tools in Stirling Engine Virtual Design,» chez *Recent advances in Mechatronics*, Springer Berlin Heidelberg, 2007
- [10] D. Aranda, K. LaMottet et S. Wood, «Solar Stirling Engine for Remote Power and Disaster Relief,» Florida International University, Florida, 2010.
- [11] W. M. Kays et A. L. London, *Compact heat exchangers*, 2nd edn, 1964.
- [12] Y. Timoumi, I. Tlili et S. Ben Nasrallah, *Design and performance optimization of GPU-3 Stirling engines*, *Energy*, 33, (2008), 1100 – 1114.
- [13] M. Ni, . B. Shi, G. Xiao, H. Peng, U. Sultan, S. Wang, Z. Luo et K. Cen, *Improved Simple Analytical Model and experimental study of a 100 W Beta-type Stirling engine*, *Applied Energy*, 169, (2016), 768 – 787.
- [14] M. Babaelahi et H. Sayyadi, *Simple-II: A new numerical thermal model for predicting thermal performance of Stirling engines*, *Energy*, 69, (2014), 873 - 890, 2014.
- [15] L. G. Thieme, *Low-power baseline test results for the GPU-3 Stirling engine*, National Aeronautics and Space Administration - Lewis Recherche Center, Cleveland, Ohio, (1979).