**THÈSE DE DOCTORAT**

**DE L'ÉTABLISSEMENT UNIVERSITÉ BOURGOGNE FRANCHE-COMTÉ**

**PRÉPARÉE À L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ**

École doctorale n° 37

Sciences Pour l'Ingénieur et Microtechniques

Doctorat de Mécanique

par

NICOLAS LAFORGE

# Guides d'onde phononiques topologiques

Thèse présentée et soutenue à Besançon, le 29 avril 2021

Composition du Jury :

| | | |
|---|---|---|
| LEBLOIS THÉRÈSE | Professeure des Universités, Université Bourgogne Franche-Comté | Présidente |
| PAGNEUX VINCENT | Directeur de Recherche, CNRS, Le Mans Université | Rapporteur |
| PENNEC YAN | Professeur des Universités, Université de Lille | Rapporteur |
| FLEURY ROMAIN | Professeur Associé, École Polytechnique Fédérale de Lausanne | Examinateur |
| GUENNEAU SÉBASTIEN | Directeur de Recherche, CNRS, Imperial College London | Examinateur |
| DELPLACE PIERRE | Chargé de Recherche, CNRS, École Normale Supérieure de Lyon | Examinateur |
| LAUDE VINCENT | Directeur de Recherche, CNRS, Université Bourgogne Franche-Comté | Directeur de thèse |
| KADIC MUAMER | Maître de Conférence, Université Bourgogne Franche-Comté | Encadrant de thèse |

N° | X | X | X |

# REMERCIEMENTS

Cette thèse est le résultat de plus de trois années de recherche et n'aurait pas vu le jour sans les apports scientifiques et humains de nombreuses personnes que je souhaite remercier.

Tout d'abord, je remercie mes encadrants de thèse, Muamer Kadic et Vincent Laude, pour m'avoir patiemment accompagné aux cours de ces travaux. Merci pour votre confiance et votre soutien tout au long de cette thèse.

Je tiens aussi à remercier les membres de mon jury : merci à Thérèse Leblois d'avoir accepté d'en être la présidente, merci à Vincent Pagneux et à Yan Pennec qui ont rapporté ce travail de thèse.

Merci aussi à l'équipe Phononique et Microscopies, au sein de laquelle j'ai travaillé toutes ces années, pour les nombreuses discussions et l'aide apportée notamment en salle d'expériences, notamment par Alexis Mosset et Gwenn Ulliac.

Les résultats présentés dans cette thèse sont issus de nombreuses collaborations avec d'autres laboratoires, et je remercie celles et ceux avec qui il m'a été possible de travaillé, à savoir Romain Fleury, Yuning Guo, Franck Chollet, Abdelkrim Khelif, Mehul Makwana, Richard Craster, Guillaume Dupont, Richard Wiltshaw et Sébastien Guenneau.

Je remercie tous les autres doctorants et post-doctorants du laboratoire que j'ai côtoyé pendant cette thèse pour les nombreuses discussions de la pause-café et tous les bons moments passés ensembles. En espérant n'oublier personne : Coraline, Vincent, Alexandre, Benoît, Clément, Thomas, Sheller, Amélie, Florent, Louis, Rémi, Solveig, Amar, Johnny, Chen, Ji, Ting-ting, Davide et Julio.

Enfin, je tiens à remercier tout particulièrement ma famille pour leur indéfectible soutien tout au long de cette thèse, que je souhaite leur dédier. Merci à mon frère Luca, à ma sœur Raphaëlle et à ma mère Frédérique.

# SOMMAIRE

**Introduction générale** 1

**1 Ondes, cristaux phononiques et topologie.** 3

1.1 Généralités sur les ondes . . . 3

1.1.1 Propagation libre . . . 4

1.1.2 Paramètres caractéristiques des ondes . . . 6

1.2 Métamatériaux . . . 7

1.2.1 Présentation des métamatériaux . . . 8

1.2.2 Cristaux phononiques . . . 9

1.2.3 Mécanisme d'ouverture des bandes interdites . . . 13

1.3 Topologie . . . 18

1.3.1 Notions de base de la topologie . . . 18

1.3.2 Le modèle de Su-Schriefer-Hegger . . . 18

1.3.3 Modèle acoustique . . . 23

**2 Cristal topologique pour des ondes de gravité-capillarité** 27

2.1 Dispositif expérimental . . . 28

2.2 Comportement de l'eau dans les conditions expérimentales . . . 29

2.3 Conception d'un cristal présentant une bande interdite . . . 33

2.3.1 Géométrie du cristal étudié . . . 33

2.3.2 Relation de dispersion . . . 35

2.3.3 Influence des paramètres géométriques du cristal . . . 36

2.3.4 Vérification expérimentale du comportement de l'échantillon . . . 39

2.3.5 Correction du modèle utilisé . . . 40

2.3.6 Vérification expérimentale du comportement de l'échantillon après correction du modèle numérique . . . 41

2.4 Conception d'un cristal présentant un comportement topologique . . . . . 41
2.4.1 Influence de l'orientation des piliers du cristal . . . . . 42
2.4.2 Étude d'interfaces composées de cristaux à bande interdite . . . . . 44
2.4.3 Caractérisation expérimentale . . . . . 47
2.5 Conclusion . . . . . 50

**3 Cristal topologique séparateur d'onde de gravité-capillarité 51**
3.1 Conception du cristal . . . . . 51
3.1.1 Enjeux . . . . . 51
3.1.2 Structure cellulaire C2v . . . . . 52
3.1.3 Structure cellulaire C4v . . . . . 54
3.1.4 Dispositif expérimental . . . . . 55
3.1.5 Comportement de l'eau dans les conditions expérimentales . . . . . 58
3.2 Conception d'un cristal présentant une bande interdite . . . . . 59
3.2.1 Géométrie du cristal étudié . . . . . 59
3.2.2 Relation de dispersion . . . . . 60
3.2.3 Simulation de la transmission d'un cristal à bande interdite . . . . . 61
3.2.4 Vérification expérimentale de la transmission d'un cristal à bande interdite . . . . . 62
3.3 Conception d'un cristal présentant un comportement topologique . . . . . 63
3.3.1 Design des interfaces . . . . . 64
3.3.2 Étude de la transmission d'un cristal avec une interface . . . . . 66
3.4 Conception d'un cristal séparateur d'ondes . . . . . 67
3.5 Conclusion . . . . . 69

**4 Conception d'un séparateur d'onde acoustique à trois voies 71**
4.1 Étude numérique . . . . . 71
4.1.1 Formulation du problème . . . . . 71
4.1.2 Conception des cristaux . . . . . 73
4.1.3 Calcul des diagrammes de dispersion des cellules carrées et rectangulaires . . . . . 75

4.1.4 Calcul des diagrammes de dispersion des interfaces . . . . . 79
4.2 Validation expérimentale . . . . . 81
4.2.1 Validation numérique . . . . . 83
4.2.2 Observation d'un comportement topologique . . . . . 83
4.2.3 Validation du comportement du séparateur d'onde trois voies . . . . 85
4.2.4 Conception de circuits acoustiques topologiques avancés . . . . . 87
4.3 Conclusion . . . . . 89

**Conclusion générale et perspectives** **91**

**Contributions** **95**

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'omniprésence des ondes dans notre environnement a mené au développement de nombreux dispositifs permettant leur contrôle et leur étude. Les premières ayant été exploités, car pouvant être produites et perçues par l'Homme, sont les ondes acoustiques. L'un des premiers et plus représentatifs exemples de maîtrise des ondes acoustiques est l'architecture des amphithéâtres construits par les Grecs puis sous l'Empire Romain, permettant à un interlocuteur d'être entendu par tous les spectateurs. Mais c'est au cours du XIXème siècle que l'étude des ondes connaîtra un tournant via la compréhension de l'électromagnétisme. Ce sont ces ondes qui sont aujourd'hui massivement utilisées par les technologies de l'information.

Ces technologies ont permis la fabrication de dispositifs permettant l'avènement de nouveaux champs de recherche, tels que l'étude des phénomènes quantiques. C'est via une expérience réalisée dans cette discipline qu'a été observé pour la première fois dans les années 1980 un comportement dit "topologique", auparavant cantonné au rang de théorie. Ce phénomène a suscité l'intérêt des chercheurs travaillant à la réalisation de dispositifs de guidage des ondes, car il permet en théorie un confinement des ondes dans le milieu de propagation, ainsi que de très faibles pertes lors du transport du signal. Les premières expériences appliquant la topologie au guidage d'ondes ont été réalisées pour des applications faisant intervenir des ondes électromagnétiques, et se sont complexifiées de la fin du XXème siècle jusqu'à nos jours.

Mais ces applications nécessitent des matériaux conçus de la main de l'Homme, appelés métamatériaux. Ces derniers ont aussi été développés en premier lieu pour des applications faisant intervenir des ondes électromagnétiques, mais depuis les années 2000, de nombreuses applications issues des métamatériaux électromagnétiques ont été transposées à d'autres champs de la physique, en particulier dans le domaine des ondes acoustiques. La topologie est l'un des champ d'études les plus récents ayant été transposés dans ce domaine, et de nombreux résultats encourageants ont montré la possibilité de guider des ondes acoustiques au moyen de la topologie. Cependant, que ce soit en acoustique ou en électromagnétisme, les expériences faisant intervenir la topologie regroupent deux conditions initiales : premièrement, le milieu étudié est non-dispersif, ou sa dispersion est négligée lors de l'étude, et deuxièmement, le métamatériau utilisé fait intervenir un cristal dont la géométrie reprend les motifs du graphène.

Ces éléments restreignent les possibilités d'application de la topologie, car la majorité

des milieux dans lesquels les ondes se propagent sont dispersifs, et la géométrie du graphène ne permet pas un certain nombre d'opérations sur les ondes. Dans cette thèse, nous développons dans un premier temps un métamatériau permettant l'existence d'un comportement topologique dans un milieu fortement dispersif. Notre choix s'est porté sur l'étude de la propagation des ondes à la surface de l'eau. Une fois cette étape réalisée, nous vérifions expérimentalement l'existence d'un comportement topologique pour un métamatériau dont la géométrie n'est pas comparable à celle du graphène, toujours en utilisant des ondes à la surface de l'eau. Pour finir, nous réutilisons cette géométrie et la transposons au cas d'ondes acoustiques dans l'eau, afin de confirmer la possibilité de séparer une onde dans trois directions grâce à la topologie, sachant que cette opération n'est pas permise par la géométrie du graphène.

# 1

# ONDES, CRISTAUX PHONONIQUES ET TOPOLOGIE.

Le but de ce premier chapitre est la mise en contexte de cette thèse qui vise à étudier la propagation d'ondes dans des métamatériaux périodiques présentant un comportement topologique, en particulier pour des ondes de surface et des ondes de volume dans l'eau. Les métamatériaux étudiés consistent en des cristaux phononiques, qui permettent le contrôle de la propagation d'ondes élastiques notamment en faisant appel au mécanisme d'ouverture de bandes interdites. Ce mécanisme se caractérise par l'existence d'une gamme de fréquences pour laquelle les ondes se propageant dans ledit cristal voient leur amplitude fortement atténuée, dans une direction donnée dans le cas d'une bande interdite "directionnelle", ou dans toutes les directions de propagation possibles dans le cas d'une bande interdite "complète". Les deux mécanismes d'ouverture de bandes interdites sont les interférences de Bragg et les résonances locales. Concernant la topologie, il s'agit d'un domaine des mathématiques s'intéressant à l'étude des déformations continues. La structure du chapitre suivant consistera donc dans un premier temps en l'exposition de généralités sur les ondes, la description de métamatériaux et en particulier des cristaux phononiques, puis le détail des mécanismes permettant l'étude du comportement en fréquence de tels cristaux, et enfin, comment la topologie peut être utilisée pour améliorer de tels cristaux [81, 84].

## 1.1/ GÉNÉRALITÉS SUR LES ONDES

Dans cette partie, nous nous intéressons à la présentation des ondes et à leur propagation libre dans des milieux continus, ainsi que la description de leurs paramètres caractéristiques.

### 1.1.1/ PROPAGATION LIBRE

La propagation d'une onde dans un milieu continu peut être décrite comme la perturbation de proche en proche de la position d'équilibre des particules constituant le milieu. Il s'agit donc d'un transfert d'énergie sans transfert de matière. Une représentation classique de ce phénomène est le modèle présenté par d'Alembert qui consiste à considérer une chaîne unidimensionnelle constituée d'une alternance de masses et de ressorts. La perturbation de la position d'équilibre de la première masse est transmise à la deuxième par l'intermédiaire du premier ressort, qui a son tour transmet cette perturbation à la troisième masse via le deuxième ressort, et ainsi de suite. Il en va de même pour toutes les oscillations qui précèdent le retour en position d'équilibre des masses.

Ce modèle peut être exprimé mathématiquement de la manière suivante. Nous considérons une chaîne de masses ponctuelles $m$ interconnectées par des ressorts sans masse de longueur $h$ et de raideur $C$ tel que présenté sur la Figure 1.1.

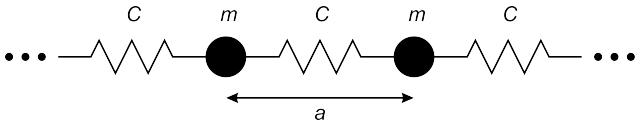



FIGURE 1.1 – Les masses $m$ sont supposées ponctuelles et sont connectées entre elles par des ressorts de raideur $C$. La chaîne est supposée périodique et infinie, avec un parametre de maille $a$.

Nous posons $u(x)$ le déplacement de la masse $m$ en $x$ par rapport à sa position de repos à l'horizontale. Les forces qui s'exercent sur la masse $m$ au point $x+h$ sont les suivantes :

$$F_{\text{Newton}} = m \cdot a(t) = m \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x+h,t), \tag{1.1}$$

$$F_{\text{Hooke}} = F_{x+2h} - F_x = k\,[u(x+2h,t) - u(x+h,t)] - k[u(x+h,t) - u(x,t)]. \tag{1.2}$$

Le déplacement de la masse au point $x+h$ vérifie donc l'équation :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x+h,t) = \frac{k}{m}[u(x+2h,t) - u(x+h,t) - u(x+h,t) + u(x,t)]. \tag{1.3}$$

Dans le cas d'une chaîne finie comprenant $N$ masses équidistantes, donc de longueur $L = Nh$, et de masses totale $M = Nm$, et de raideur totale $K = k/N$, l'équation devient :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x+h,t) = \frac{KL^2}{M} \frac{u(x+2h,t) - 2u(x+h,t) + u(x,t)}{h^2}. \tag{1.4}$$

En faisant tendre $N$ vers l'infini et en considérant la longueur totale comme restant finie,

ce qui implique que $h$ tende vers 0, on obtient :

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{KL^2}{M}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \tag{1.5}$$

avec $c^2 = KL^2/M = kh^2/m$ le carré de la vitesse de propagation de la déformation.

Dans le cas d'un problème à une dimension, l'équation peut s'écrire

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \tag{1.6}$$

Lorsque la variable $z$ parcourt toute la droite réelle, la solution générale de cette équation est la somme de deux fonctions :

$$U(z,t) = F(z-ct) + G(z+ct). \tag{1.7}$$

En effet, il est possible d'écrire :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)U(z,t) = 0, \tag{1.8}$$

soit :

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)U(z,t) = 0, \tag{1.9}$$

et en posant $a = z–ct$ et$b = z + ct$, il ressort :

$$\left(\frac{\partial}{\partial a}\right)\left(\frac{\partial}{\partial b}\right)V(a,b) = 0 \tag{1.10}$$

avec

$$V(a,b) = U\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2c}\right). \tag{1.11}$$

Cette équation se résout en posant

$$V(a,b) = F(a) + G(b) \tag{1.12}$$

ce qui revient à poser

$$U(z,t) = F(z-ct) + G(z+ct). \tag{1.13}$$

Le premier terme correspond à une onde se propageant dans le sens des $z$ croissants, c'est à dire une onde progressive, et le deuxième terme à une onde se propageant dans le sens des $z$ décroissants, c'est à dire une onde régressive. Dans le cas d'un problème aux conditions initiales, les fonctions $F$ et $G$ y sont directement liées. En considérant des

conditions initiales de la forme

$$\begin{cases} U(z,0) & = f(z), \\ \frac{\partial}{\partial t}U(z,0) & = g(z), \end{cases} \tag{1.14}$$

la solution s'écrit sous la forme de la "formule de d'Alembert" :

$$U(z,t) = \frac{1}{2}f(z-ct) + \frac{1}{2}f(z+ct) + \frac{1}{2c}\int_{z-ct}^{z+ct} g(s)\,\mathrm{d}s. \tag{1.15}$$

Dans le cas général d'un milieu infini tridimensionnel, les ondes peuvent se propager de différentes manières dans les milieux continus, qui se différencient les unes des autres par leur polarisation, c'est à dire en comparant la direction de déformation du milieu par rapport à la direction de propagation de l'onde. Dans le cas d'un milieu isotrope, ce qui signifie que ses propriétés sont indépendantes de la direction, les deux types d'ondes pouvant se propager sont les ondes longitudinales, dont la direction de déformation est parallèle à la direction de propagation, et les ondes transverses, dont la direction de déformation est orthogonale à la direction de propagation. À noter que ces dernières n'existent pas dans les fluides non visqueux, donc idéalement ni dans l'eau ni dans l'air.

Lorsque les dimensions latérales du milieu dans lequel se propagent les ondes planes sont grandes devant la longueur d'onde du faisceau d'ondes, ce qui est le cas pour un milieu considéré comme infini, on parle d'ondes de volume. Dans le cas d'un milieu semi-infini, il est possible que des ondes se propagent au niveau de l'interface libre du milieu, on parle alors d'ondes de surface ou d'ondes d'interface. Les deux types d'ondes de surface les plus fréquentes sont les ondes de Rayleigh pour lesquelles la polarisation est elliptique, et les ondes de Love dont la polarisation est purement transverse. L'amplitude de ces ondes décroit exponentiellement avec la profondeur.

### 1.1.2/ PARAMÈTRES CARACTÉRISTIQUES DES ONDES

Une onde monochromatique se caractérise par sa fréquence $f$ qui correspond au nombre d'oscillations d'un élément du milieu autour de sa position d'équilibre par unité de temps, sa longueur d'onde $\lambda$ qui correspond à la distance séparant deux particules dont les oscillations sont en phase, et sa vitesse de phase $c_\mathrm{p}$. Ces paramètres sont liés par la relation suivante :

$$c_\mathrm{p} = \lambda f. \tag{1.16}$$

Deux autre paramètres caractéristiques des ondes monochromatiques sont le nombre d'onde $\kappa$ défini par

$$\kappa = \frac{2\pi}{\lambda}, \tag{1.17}$$

et la pulsation $\omega$ définie par

$$\omega = 2\pi f. \tag{1.18}$$

Dès lors, il est possible d'exprimer la vitesse de phase sous la forme

$$c_{\mathrm{p}} = \frac{\omega}{\kappa}. \tag{1.19}$$

Dans le cas d'une onde non monochromatique, la représentation de l'onde la plus appropriée est celle du paquet d'ondes. Il convient alors de définir la vitesse de déplacement de l'enveloppe de l'onde, c'est la vitesse de groupe $c_g$ définie par

$$c_{\mathrm{g}} = \frac{\partial \omega}{\partial \kappa}. \tag{1.20}$$

Dans le cas où la vitesse de phase est indépendante de la fréquence, on dit que le milieu est "non-dispersif". Dans un tel milieu, la vitesse de phase et la vitesse de groupe sont égales. Dans un milieu dispersif, ce n'est pas le cas, comme illustré par la Figure 1.2.

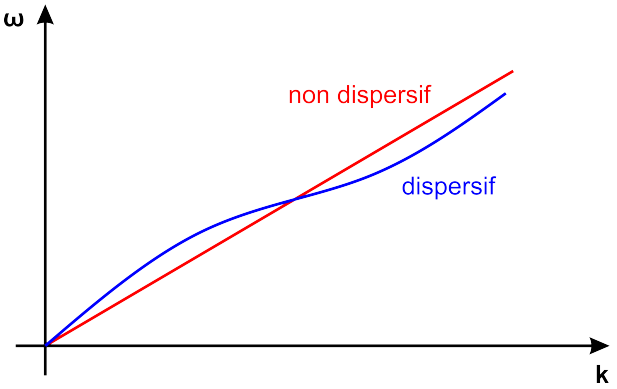



FIGURE 1.2 – Illustration de la relation de dispersion d'un milieu dispersif et d'un milieu non-dispersif.

## 1.2/ MÉTAMATÉRIAUX

La section précédente ne décrit que le comportement des ondes dans des milieux homogènes. Cependant, notre environnement est constitué d'un nombre important de différents milieux, comportant différentes interfaces les séparant. Lorsqu'une onde atteint une telle frontière, elle peut produire des ondes réfractées et des ondes réfléchies. La conception de matériaux tirant parti de ce phénomène peut avoir un intérêt important dans le cadre de la création de dispositifs de contrôle des ondes. Dans cette section, nous nous intéressons à de tels matériaux, qualifiés de métamatériaux, et en particulier des cristaux phononiques.

### 1.2.1/ PRÉSENTATION DES MÉTAMATÉRIAUX

L'idée de concevoir des matériaux artificiels composés d'un assemblage astucieux de matériaux de base n'est pas nouvelle, et a déjà trouvé de nombreuses applications, dont l'exemple le plus connu auprès du grand public sont les matériaux composites, consistant en un assemblage de fibres, les plus connues étant les fibres de carbone, et d'une matrice en résine, le plus souvent de l'époxy. De tels matériaux présentent des propriétés mécaniques comparables à celles de métaux, pour un poids bien moindre.

Les métamatériaux reposent sur l'idée de concevoir des matériaux dont les propriétés sont supérieures à celles des matériaux qui les composent [44, 21], voire des propriétés qui sont inaccessibles à des matériaux naturels, le premier exemple étant l'obtention de vitesses de phase négatives pour des ondes électromagnétiques [30, 27]. Un tel résultat a été suivi d'un gain d'intérêt important pour de tels matériaux, ce qui a ouvert la perspective de voir apparaître un jour des applications telles que des capes d'invisibilités permettant la protection de dispositifs face à de telles ondes [28, 35, 40, 41]. Mais le domaine des ondes électromagnétiques n'a pas été le seul à s'intéresser à ces métamatériaux. En effet, la similarité des équations décrivant le comportement des ondes électromagnétiques et des ondes élastiques laisse penser qu'il serait possible d'obtenir des résultats similaires pour des ondes élastiques [26, 34, 48, 62].

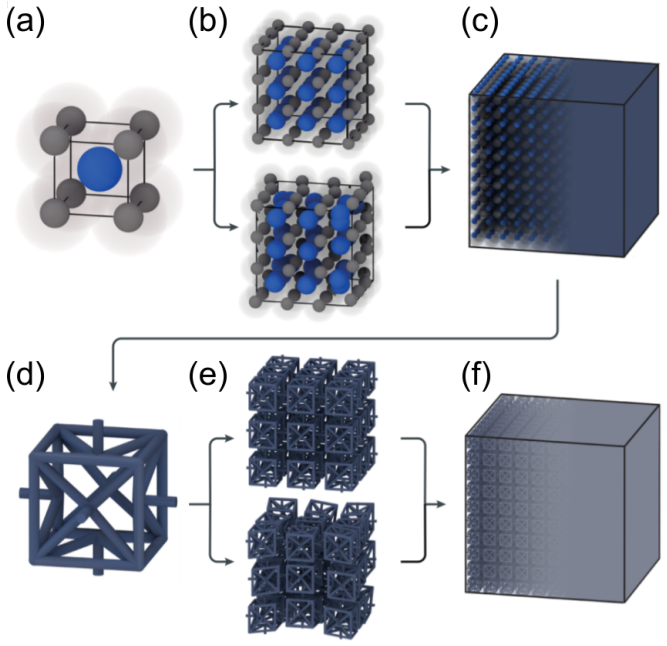



FIGURE 1.3 – Représentation schématique du principe sur lequel reposent les métamatériaux, ici mécaniques, d'après [96]. (a) Illustration d'une cellule unitaire du matériau de base. (b) Assemblage cristallin ou amorphe de cellules unitaires. (c) Matériau effectif utilisé pour la conception de "méta-atomes". (d) Cellule unitaire d'un métamatériau. (e) Assemblage périodique ou non de cellules unitaires. (f) Métamatériau final.

De manière générale, les propriétés des métamatériaux ne dépendent pas de la chimie des matériaux les constituant, mais de leur organisation spatiale, comme illustré par la Figure 1.3.

### 1.2.2/ CRISTAUX PHONONIQUES

Les cristaux phononiques sont des structures qui ont été décrites pour la première fois par Kushwaha et al. [13] en faisant un parallèle avec les cristaux photoniques [47]. Ils se caractérisent par un assemblage périodique de plusieurs matériaux, le plus souvent le matériau dans lequel les ondes étudiées se propagent, et un deuxième qui, dans le cas où le premier matériau est un fluide, est un solide présentant des propriétés mécaniques très supérieures, et dans le cas où le premier matériau est un solide, le deuxième peut être un solide avec des propriétés mécaniques moins importantes, ou un fluide, le plus souvent de l'air [29, 68].

Un cristal correspond à un état ordonné d'un matériau [103]. L'ensemble des "atomes" le constituant sont réparties dans l'espace selon un réseau de Bravais, de telle sorte que leur position $R$ est liée aux vecteurs de base $a_1$, $a_2$ et $a_3$ du réseau selon la relation :

$$R = n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3, \tag{1.21}$$

avec $n_i$ des entiers quelconques. Le nombre de réseaux de Bravais possibles est fini, quel que soit le nombre de dimensions considérées.

- Dans l'espace uni-dimensionnel, il n'y en a qu'un seul.
- Dans l'espace bi-dimensionnel, il en existe cinq : oblique, rectangulaire, rhombique, hexagonal et carré, visibles sur la Figure 1.4.
- Dans l'espace tri-dimensionnel, on en retrouve 14, répartis en 7 systèmes : triclinique, monoclinique, orthorhombique, tétragonal, rhomboédrique, hexagonal et cubique, dont des exemples sont visibles sur la Figure 1.5.

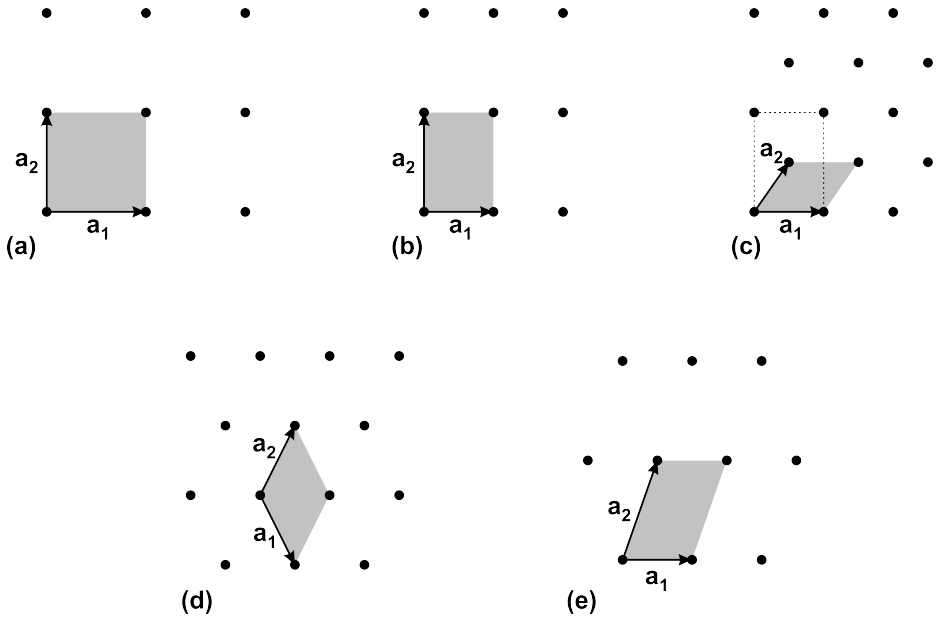



FIGURE 1.4 – Aperçu des cinq réseaux de Bravais bi-dimensionnels. La zone grisée représente la cellule primitive associée au réseau considéré. L'angle entre les vecteurs primitifs $\mathbf{a}_1$ et $\mathbf{a}_2$ est noté $\phi$. (a) Pour un réseau tétragonal, $|\mathbf{a}_1| = |\mathbf{a}_2|$ et $\phi = \pi/2$. (b) Pour un réseau orthorhombique primitif, $|\mathbf{a}_1| \neq |\mathbf{a}_2|$ et $\phi = \pi/2$. (c) Pour un réseau orthorhombique centré, $|\mathbf{a}_1| \neq |\mathbf{a}_2|$ et $\phi \neq \pi/2$, mais $(2\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1)\cdot\mathbf{a}_1 = 0$. (d) Pour un réseau hexagonal, $|\mathbf{a}_1| = \mathbf{a}_2|$ et $\phi = 2\pi/3$. (e) Pour un réseau monoclinique, $|\mathbf{a}_1| \neq |\mathbf{a}_2|$ et $\phi \neq \pi/2$.

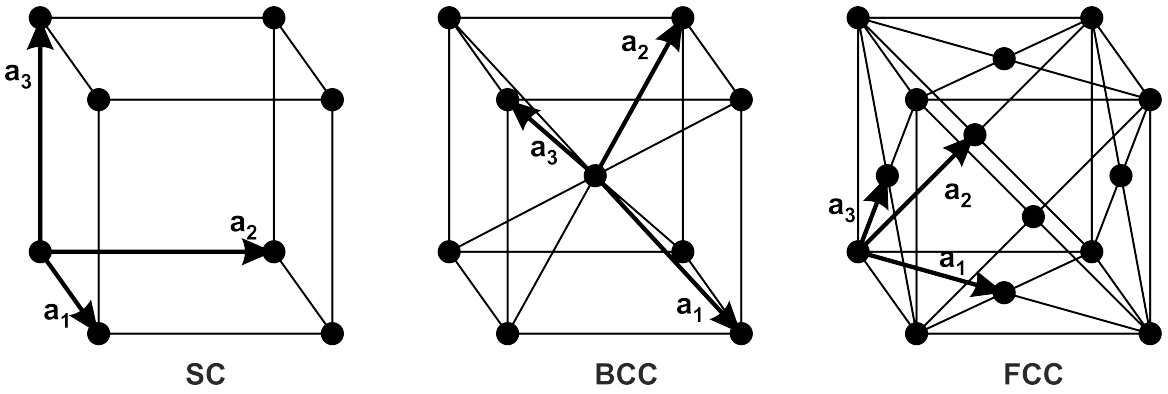



FIGURE 1.5 – Aperçu vecteurs primitifs des trois réseaux de Bravais tri-dimensionnels cubiques, avec (SC) le réseau cubique simple, (BCC) le réseau cubique centré et (FCC) le réseau cubique à faces centrées.

La structure cristalline d'un matériau peut être décrite en termes de cellules unitaires. Il s'agit d'une structure géométrique contenant un ou plusieurs "atomes", et qui, une fois répétée périodiquement, permet d'obtenir le cristal étudié sans laisser d'espace vide. Il y a donc une infinité de cellules unitaires possibles, mais il en existe une pour laquelle la surface ou le volume considéré (selon que l'on travaille en deux ou trois dimensions) correspond au minimum possible. Elle est définie autour d'un point du réseau comme étant le lieu où ce point du réseau est plus proche que n'importe quel autre point du

réseau. Pour la construire géométriquement, on sélectionne un point du réseau, on trace une ligne le reliant aux points les plus proches. Au milieu de cette ligne, on trace une ligne (ou un plan si l'on travaille en trois dimensions) normale à chaque ligne. La cellule unitaire ainsi obtenue porte le nom de cellule de Wigner-Seitz.

Le réseau réciproque d'un réseau de Bravais est par définition le réseau dans lequel la transformée de Fourier du champ d'onde du réseau original est représenté. Le réseau réciproque est donc lui aussi un réseau de Bravais, et le réciproque du réseau réciproque correspond au réseau original. Mathématiquement, le réseau réciproque peut être décrit comme l'ensemble de vecteurs $\boldsymbol{K}$ qui satisfont l'équation suivante pour tous les points de $\boldsymbol{R}$ :

$$exp(-i\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{R}) = 1. \tag{1.22}$$

Les vecteurs de base $b_1$, $b_2$ et $b_3$ du réseau réciproque vérifient donc la relation :

$$b_j \cdot a_i = 2\pi\delta_{ij}, \tag{1.23}$$

où $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et où $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$, ce qui permet d'écrire

$$\boldsymbol{K} = m_1 b_1 + m_2 b_2 + m_3 b_3. \tag{1.24}$$

Ainsi, le réseau réciproque d'un réseau carré est aussi un réseau carré, le réseau réciproque d'un réseau hexagonal est aussi un réseau hexagonal (avec cependant une rotation de $\pi/6$ dans l'espace réciproque). La première zone de Brillouin est quant à elle simplement définie comme étant la cellule de Wigner-Seitz du réseau réciproque, comme illustré par la Figure 1.6 dans le cas d'un réseau hexagonal et par la Figure 1.7 dans le cas d'un réseau carré.

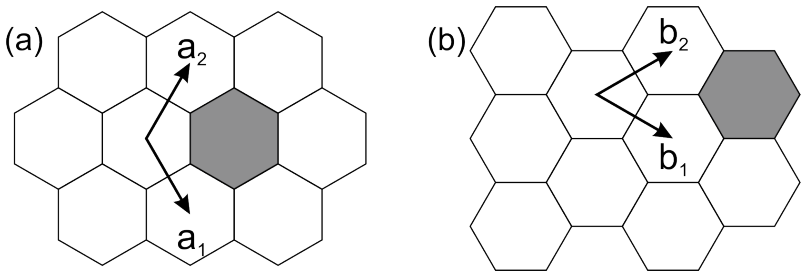



FIGURE 1.6 – (a) Réseau hexagonal et ses vecteurs de base $a_1$ et $a_2$. La cellule mise en valeur correspond à la cellule de Wigner-Seitz. (b) Réseau réciproque correspondant et ses vecteurs de base $b_1$ et $b_2$. La cellule mise en valeur correspond à la première zone de Brillouin.

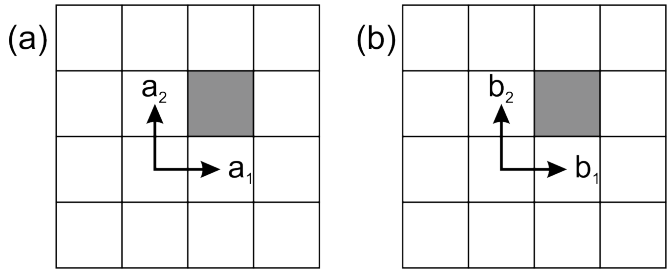



FIGURE 1.7 – (a) Réseau carré et ses vecteurs de base $a_1$ et $a_2$. La cellule mise en valeur correspond à la cellule de Wigner-Seitz. (b) Réseau réciproque correspondant et ses vecteurs de base $b_1$ et $b_2$. La cellule mise en valeur correspond à la première zone de Brillouin.

La périodicité des cristaux phononiques permet l'utilisation du théorème de Bloch-Floquet [53] qui s'exprime de la manière suivante. Les modes propres d'une équation de Helmholtz périodique sont des ondes de Bloch de la forme

$$u(r) = \exp(-i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r})\tilde{u}(\boldsymbol{r}) \tag{1.25}$$

où $\tilde{u}(\boldsymbol{r})$ est une fonction périodique de même périodicité que le cristal et $\boldsymbol{k}$ le vecteur d'onde de Bloch. La connaissance de la propagation des ondes de Bloch au sein de la première zone de Brillouin est suffisante pour construire toutes les ondes de Bloch se propageant dans un milieu périodique. De plus, en considérant toutes les symétries du cristal et de la première zone de Brillouin, il est possible de restreindre l'étude à la zone irréductible de Brillouin [33].

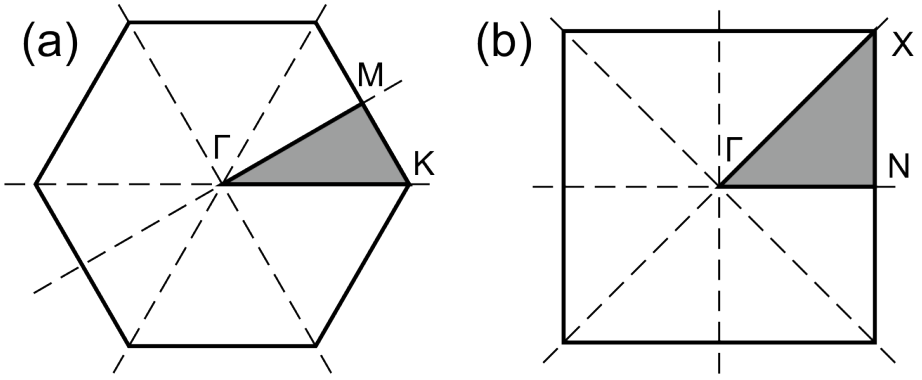



FIGURE 1.8 – (a) Première zone de Brillouin d'un réseau hexagonal, avec ses symétries représentées par des lignes en pointillés. (b) Première zone de Brillouin d'un réseau carré, avec ses symétries représentées par des lignes en pointillés. Les zones mises en valeur correspondent aux zones irréductibles de Brillouin.

### 1.2.3/ MÉCANISME D'OUVERTURE DES BANDES INTERDITES

L'une des propriétés pour lesquelles sont utilisés les métamatériaux périodiques est leur capacité à pouvoir présenter des bandes de fréquences interdites, c'est à dire des gammes de fréquences pour lesquelles la propagation d'ondes au sein de ces matériaux est impossible. Avant de discuter leur origine dans des matériaux complexes, nous allons d'abord nous intéresser à leur existence pour un cristal uni-dimensionnel.

En reprenant le modèle le plus simple d'un milieu continu dans lequel des ondes se propagent, c'est à dire une chaîne infinie, périodique, composée de masses identiques de masse $m$, reliées entre elles par des ressorts de même raideur $C$, comme illustré par la Figure 1.9, il est possible de connaître les fréquences de propagation des ondes de Bloch dans ce milieu en fonction du nombre d'onde. Le mouvement de chaque masse vérifie l'équation

$$m\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = C\left(u_{n+1} - u_n\right) + C\left(u_{n-1} - u_n\right), \tag{1.26}$$

de laquelle est déduite la relation de dispersion

$$\omega^2 = \Omega^2(1 - \cos(ka)), \tag{1.27}$$

avec $\Omega^2 = 2C/m$ et $a$ est la distance séparant deux masses. Le diagramme de dispersion qui en est déduit est montré sur la Figure 1.10.

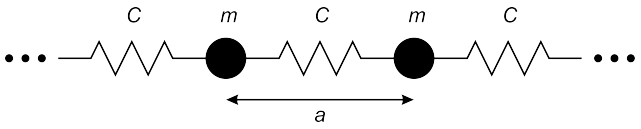



FIGURE 1.9 – Les masses $m$ sont supposées ponctuelles et sont connectées entre elles par des ressorts de raideur $C$. La chaîne est supposée périodique et infinie, avec un paramètre de maille $a$.

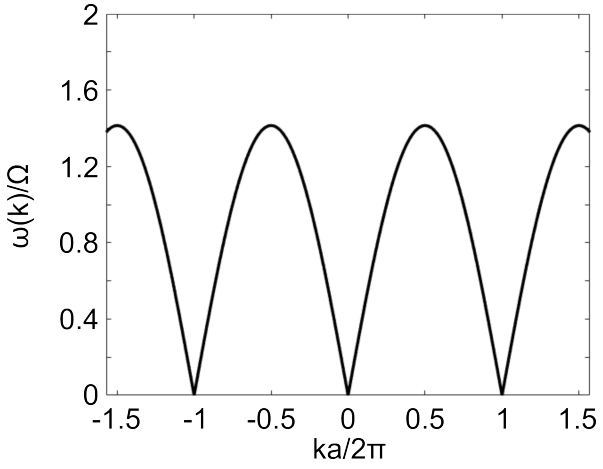



FIGURE 1.10 – Diagramme de dispersion d'une chaîne de masses $m$ et de ressorts de raideur $C$.

Si l'on considère maintenant une chaîne infinie périodique composée d'un assemblage de masses $m_1$, de masses $m_2$ et de ressorts de raideur $C$, comme illustré par la Figure 1.11, il est légitime de se poser la question du comportement de cette chaîne à une sollicitation en fréquence. Le mouvement des masses étant cette fois décrit par deux équations

$$m_1 \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = C\left(v_n - u_n\right) + C\left(v_{n-1} - u_n\right), \tag{1.28}$$

$$m_2 \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} = C\left(u_{n+1} - v_n\right) + C\left(u_n - v_n\right). \tag{1.29}$$

La relation de dispersion qui en résulte est alors

$$\left(\omega^2 - \Omega_1^2\right)\left(\omega^2 - \Omega_2^2\right) = \frac{1}{2}\Omega_1^2\Omega_2^2(1 + \cos(ka)), \tag{1.30}$$

dont la solution est donnée par

$$\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\Omega_1^2 + \Omega_2^2\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\Omega_1^4 + \Omega_2^4 + 2\Omega_1^2\Omega_2^2\cos(ka)} \tag{1.31}$$

avec $\Omega_1^2 = 2C/m_1$ et $\Omega_2^2 = 2C/m_2$. Ce sont alors deux bandes qui sont visibles sur le diagramme de dispersion, séparées par une bande de fréquences pour lesquelles les ondes ne se propagent pas au sein de la chaîne, comme montré sur la Figure 1.12.

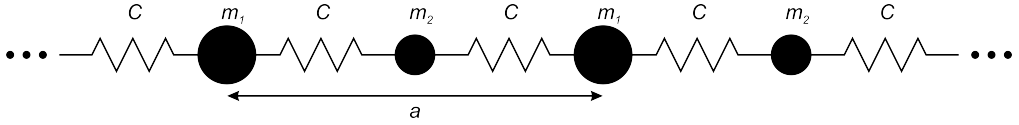



FIGURE 1.11 – Les masses $m_1$ et $m_2$ sont supposées ponctuelles et sont connectées entre elles par des ressorts de raideur $C$. La chaîne est supposée périodique et infinie, avec un paramètre de maille $a$, mais avec une masse $m_1$ et une masse $m_2$ dans chaque cellule unitaire.

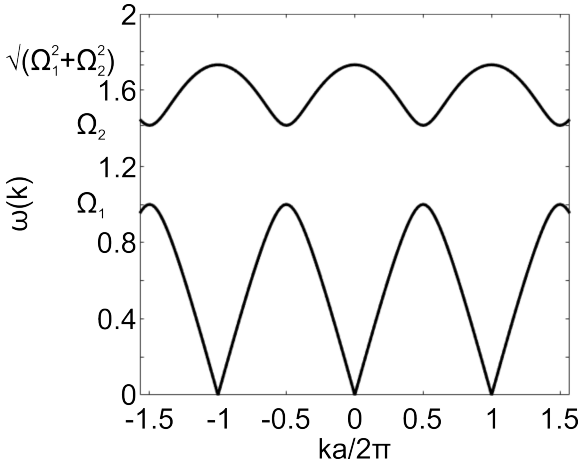



FIGURE 1.12 – Diagramme de dispersion d'une chaîne de masses $m_1$ et $m_2$ et de ressorts de raideur $C$.

En observant le comportement en fréquence des cristaux phononiques, il est possible de relever l'ouverture de bandes de fréquences interdites. Le premier mécanisme d'ouverture de bandes correspond aux interférences multiples de Bragg, qui sont dues au contraste d'impédance mécanique des différents matériaux constituant le cristal qui entraîne des réflexions multiples pouvant mener à des interférences destructives lorsque la longueur d'onde de ces ondes est de l'ordre de $\lambda = 2a$. C'est ce mécanisme d'ouverture qui est décrit par Kushwaha et al. dans [13].

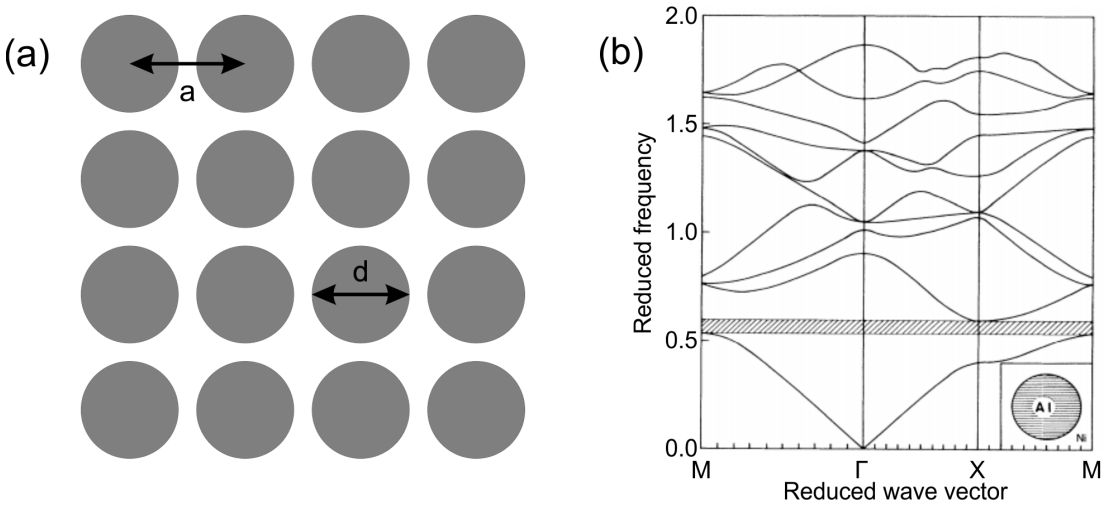



FIGURE 1.13 – (a) Schéma d'un cristal étudié par Kushwaha et al. dans [13], consistant en des cylindres d'aluminium dans une matrice de nickel. Le taux de remplissage de la cellule unitaire par l'aluminium est de 0,75. (b) Diagramme de dispersion correspondant.

Le deuxième mécanisme d'ouverture des bandes interdites est le phénomène des résonances locales, ou d'hybridation, qui a pour origine l'interaction entre les résonances localisées de certains éléments du cristal et les modes de propagation [73, 78]. La résonance dont dépend la position de la bande interdite est liée aux propriétés mécaniques et géométriques de ces éléments. Les bandes interdites ainsi obtenues sont généralement plus étroites que celles obtenues au moyen des interférences de Bragg. Elles ont été observées expérimentalement la première fois par Liu et al. [19] avec une structure composée de billes de plomb enrobées dans du silicone visible sur la Figure 1.14.

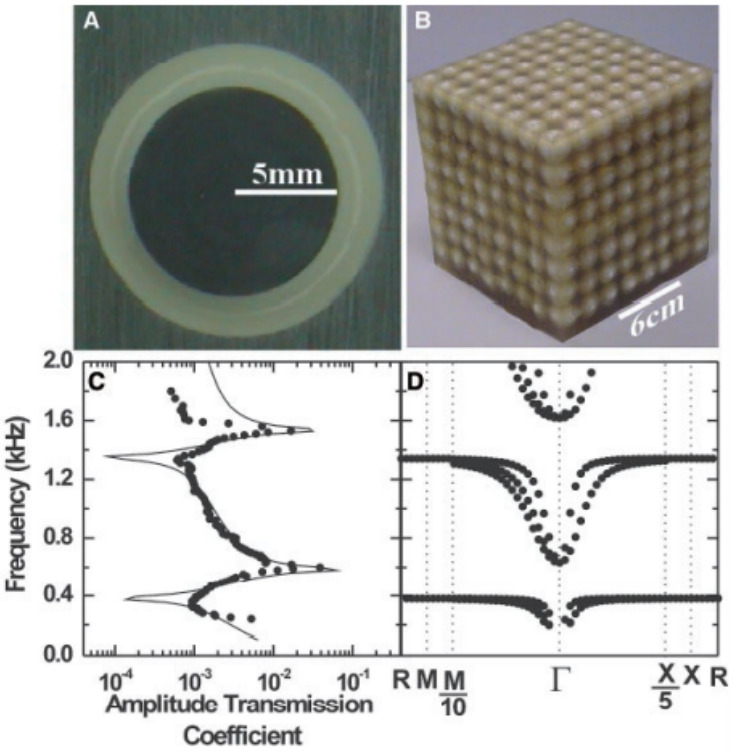



FIGURE 1.14 – Cristal phononique à résonances locales, d'après [19]. (a) Photo d'une cellule élémentaire du cristal visible en (b), composée d'une sphère de plomb de 5 mm de diamètre enrobée de silicone. L'ensemble des cellules sont liées entre elles au moyen d'une matrice en époxy. (c) Transmission de la structure obtenue numériquement (trait plein) et expérimentalement (points). (d) Diagramme de dispersion du cristal étudié.

Un tel comportement a ensuite été obtenu par Bückmann et al. [64] en utilisant un seul matériau, mais structuré de manière à reproduire un système de résonateur de type masse-ressorts tri-dimensionnel, comme montré sur la Figure 1.15.

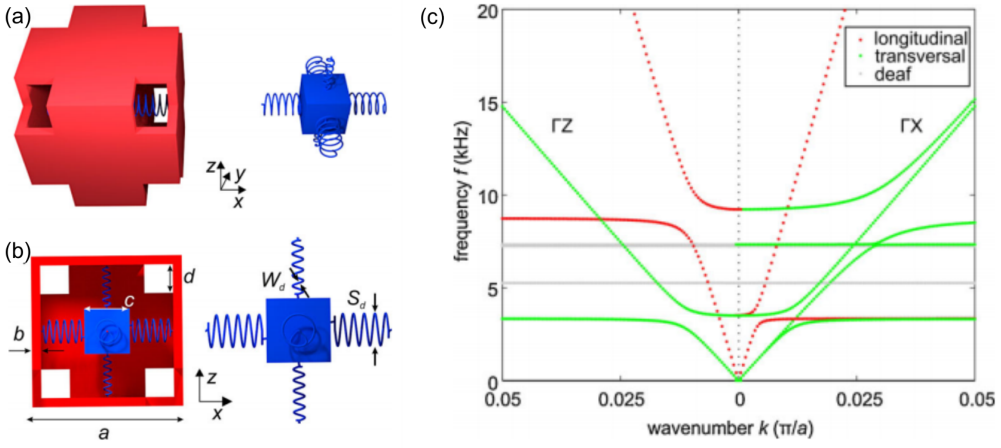



FIGURE 1.15 – (a) Aperçu de la cellule unitaire étudiée dans [64]. (b) Vue en coupe de la cellule unitaire étudiée. (c) Diagramme de dispersion associé.

L'obtention de ces bandes interdites a permis le développement de nombreuses appli-

cations, en particulier dans le domaine des ondes élastiques, et ce pour des fréquences allant de quelques hertz à plusieurs dizaines de terahertz [17, 43, 50, 57]. L'une des applications la plus communément mise en avant est l'isolation sonore, dont un exemple aisément accessible est la sculpture de Sempere à Madrid [15] visible sur la Figure 1.16.

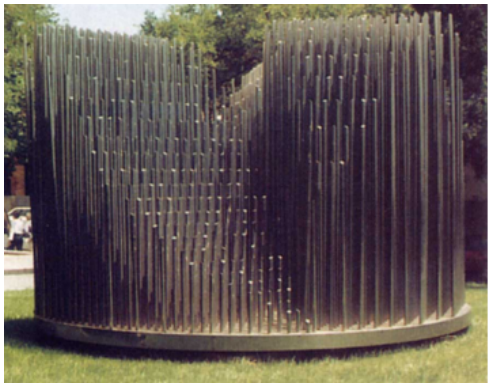


FIGURE 1.16 – Aperçu de la sculpture de Sempere à Madrid. Elle se compose de tubes d'acier disposés suivant une maille carrée, et présente une forte atténuation des ondes acoustiques pour des fréquences proches de 1670 Hz [15].

L'autre application la plus étudiée est le guidage d'ondes acoustiques [25, 59] ou élastiques au moyen de cristaux phononiques [31, 42, 63], grâce à l'introduction d'un défaut dans le cristal phononique étudié. La forme la plus commune de ce défaut est le retrait de la périodicité sur une ligne du cristal, comme proposé par la structure de Khelif et al. visible sur la Figure 1.17.

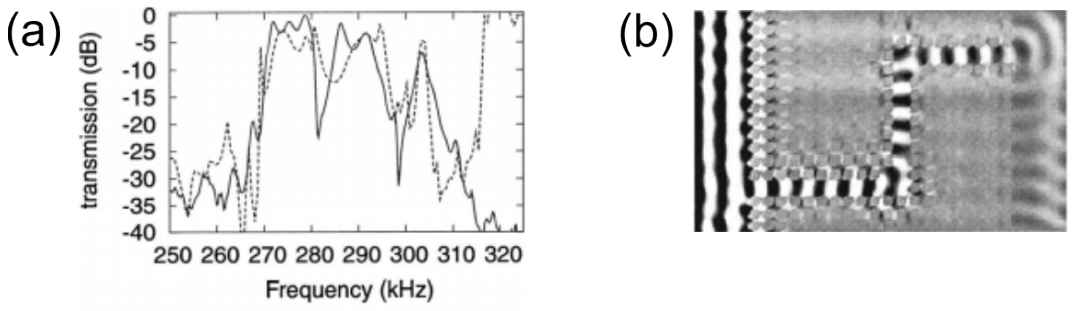



FIGURE 1.17 – Guidage d'ondes acoustiques par un cristal phononique constitué d'inclusions cylindriques d'acier dans l'eau, d'après [25]. (a) Transmission expérimentale (trait plein) et numérique (trait pointillé) du guide d'onde. (b) Déplacement calculés numériquement pour la fréquence f = 275 kHz.

## 1.3/ TOPOLOGIE

### 1.3.1/ NOTIONS DE BASE DE LA TOPOLOGIE

La topologie est un domaine des mathématiques qui se concentre sur l'étude des propriétés d'objets géométriques soumis à des déformations continues. Lorsque deux objets peuvent être obtenus l'un à partir de l'autre au moyen de déformations continues, on dit qu'ils appartiennent à la même classe topologique, par exemple une sphère et une cuillère appartiennent à la même classe topologique, de même qu'un tore et une tasse. Ces classes topologiques sont représentées par des quantités invariantes appelées invariants topologiques [60, 71]. Ces invariants topologiques ne peuvent être changés qu'avec une déformation discontinue de l'objet étudié. C'est ce que l'on appelle une transition topologique.

### 1.3.2/ LE MODÈLE DE SU-SCHRIEFER-HEGGER

Le modèle de Su-Schriefer-Heeger (SSH) [10] est le modèle discret le plus simple d'un cristal présentant des propriétés topologiques et démontrant l'existence d'états de bord conditionnés par une condition topologique. La présentation habituelle en physique quantique utilise un formalisme hamiltonien [6, 7, 9, 12, 20]. Nous utiliserons plutôt le formalisme alternatif à matrice dynamique.

Le modèle SSH a été initialement proposé pour la molécule d'acétylène, un polymère. Pour notre propos, il s'agit principalement d'un modèle permettant d'illustrer des résultats pouvant être obtenus de manière analytique. Il consiste en la répétition périodique d'un dimère, c'est à dire de deux atomes, soumis à un couplage entre plus proches voisins [46, 75]. Comme illustré dans la Figure 1.18, les deux atomes sont étiquetés A et B et la constante de réseau est $a$. Chaque atome possède exactement un degré de liberté, par exemple un déplacement ou une pression pour les ondes élastiques et acoustiques, de la même manière que les modèles de masses et de ressorts que nous avons présentés dans la section 1.2.3. Les deux atomes sont supposés avoir la même fréquence libre $\omega_0$ en l'absence de couplage. Les amplitudes de couplage sont notées $v$ et $w$ et sont exprimées en $\text{rad}^2 \cdot \text{s}^{-2}$. La matrice dynamique $D$ de la chaîne finie, limitée à la partie de

couplage, s'écrit

$$D\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ \vdots \\ A_N \\ B_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & v & & & & & \\ v & 0 & w & & & & \\ & w & 0 & v & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & w & 0 & v & \\ & & & & v & 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ \vdots \\ A_N \\ B_N \end{pmatrix}. \tag{1.32}$$

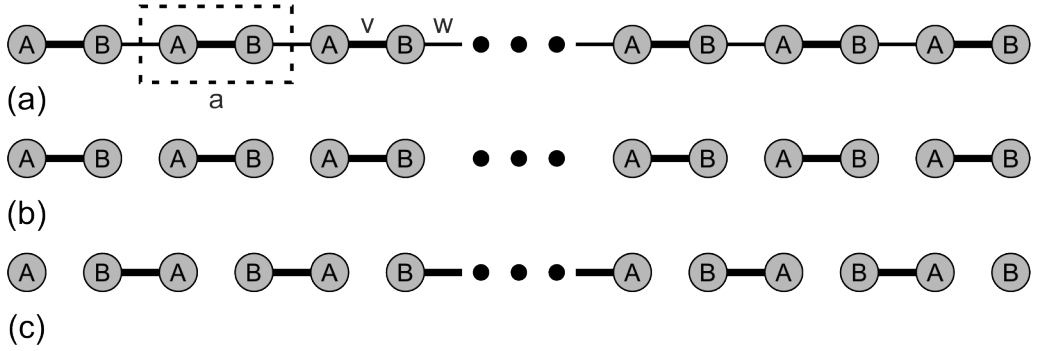



FIGURE 1.18 – Modèle SSH moléculaire (a) Chaque cellule unitaire d'une chaîne longue mais finie contient deux atomes A et B ayant la même fréquence de résonance $\omega_0$. Les degrés de liberté des atomes sont liés à leurs plus proches voisins par les amplitudes de couplage $v$ et $w$, nous notons $a$ la constante de réseau. Les amplitudes de réseau sont généralement différentes, mais lorsque $v = w$ la périodicité vaut alors $a/2$. (b) Dans la configuration où $(v, w) = (1, 0)$, chaque cellule unitaire AB est déconnectée de ses voisines. (c) Dans la configuration alternative où $(v, w) = (0, 1)$, chaque cellule unitaire BA est déconnectée de ses voisins, mais un atome A à gauche et un atome B à droite de la chaîne sont isolés. Ce sont depuis ces sites que peuvent émerger des modes de bords et c'est pour cette raison que cette configuration est qualifiée de topologique.

Si nous considérons un système à $N$ périodes, c'est-à-dire avec $N$ atomes A et $N$ atomes B, alors il y a $N$ amplitudes de couplage $v$ et $N-1$ amplitudes de couplage $w$. Un nombre impair d'atomes pourrait également être envisagé avec $N+1$ atomes A et $N$ atomes B, ce qui impliquerai $N$ amplitudes de couplage $v$ et $N$ amplitudes de couplage $w$.

Nous pouvons traiter la chaîne périodique infinie comme nous l'avons fait pour la chaîne bilinéaire de la Section 1.2.3, mais en considérant cette fois des masses égales et des ressorts inégaux. La matrice dynamique d'espace réciproque décrivant ce système s'écrit

$$D(q) = \begin{pmatrix} 0 & v + w\exp(iq) \\ v + w\exp(-iq) & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.33}$$

avec $q = ka$ le nombre d'onde normalisé. Une autre façon d'obtenir directement la matrice dynamique dans l'espace réciproque est d'utiliser le théorème de Bloch pour relier les amplitudes $(A_n, B_n)$ aux amplitudes des cellules voisines. La relation de dispersion en

volume est alors

$$(\omega^2 - \omega_0^2)^2 = v^2 + w^2 + 2vw\cos q. \tag{1.34}$$

La structure de bande ainsi obtenue est visible sur la Figure 1.19. Nous pouvons noter que la bande interdite est fermée pour $w/v = 1$, s'ouvre symétriquement pour $w/v \neq 1$ et que la largeur de la bande interdite est $2|v - w|$. Nous pouvons aussi remarquer que $v$ et $w$ jouent un rôle complètement symétrique dans la relation de dispersion mais pas dans la matrice dynamique. Cette propriété reflète le fait que partir d'un site A ou B n'a pas d'importance pour les ondes de volume dans une chaîne périodique infinie, mais a une importance pour une chaîne finie. À noter que dans le cas où $w/v = 1$ cela revient à considérer que la constante de réseau réelle vaut $a/2$ et non $a$. Alors la zone de Brillouin est deux fois plus grande que dans le cas $w/v \neq 1$. Un repliement artificiel de bande est ainsi introduit au point X, c'est-à-dire pour un nombre d'onde $q = \pi$, et la bande interdite ne peut pas s'ouvrir.

Il est courant pour de tels systèmes [46, 75] de définir la variable complexe $d = d_x + id_y$, avec $d_x = v + w\cos q$ et $d_y = -w\sin q$, de sorte que

$$D(q) = \begin{pmatrix} 0 & d^*(q) \\ d(q) & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.35}$$

et que la relation de dispersion s'exprime par

$$|d|^2 = d_x^2 + d_y^2 = (\omega^2 - \omega_0^2)^2. \tag{1.36}$$

Enfin, la phase de $d(q)$ est définie par

$$-\cot\phi(q) = \frac{v/w}{\sin q} + \cot q. \tag{1.37}$$

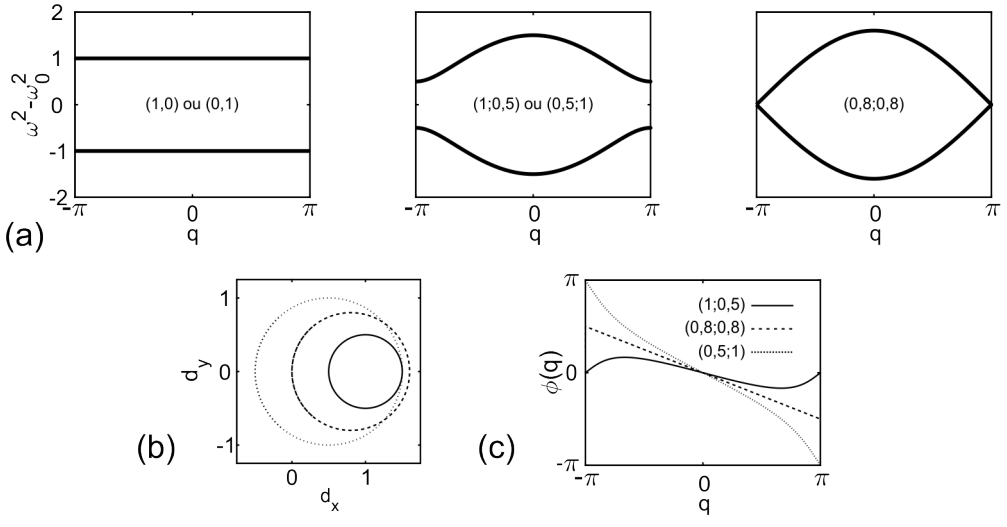


FIGURE 1.19 – Relations de dispersion associées au modèle SSH. Les paires de nombres visibles correspondent aux amplitudes de couplage $(v, w)$. (a) De gauche à droite : structure de bandes associée à une chaîne dont les cellules unitaires sont séparées, une chaîne présentant une bande interdite et une chaine symétrique. (b) Courbes fermées formées par la variable complexe *d(q)*. (c) Phase $\phi(q)$ de la variable complexe *d(q)*.

L'étape suivante consiste à prédire les modes de bord à partir de la connaissance de la dispersion des ondes de volume. Nous considérons une chaîne finie d'exactement $N$ dimères A–B, numérotés de $n = 1$ à $N$, et nous cherchons les modes propres de la chaîne finie et leurs fréquences de résonance. Puisqu'il y a $2N$ atomes, la taille de la matrice dynamique est $2N \times 2N$ et il y a $2N$ fréquences propres. À une fréquence donnée $\omega$, s'il y a une bande (donc une onde se propageant), il y a deux ondes de volume avec des nombres d'onde $\pm q(\omega)$. Nous essayons donc de construire le mode propre à partir de la superposition linéaire de deux ondes de volume se déplaçant en sens opposés le long de la chaîne, avec des amplitudes

$$\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \exp(-i\phi(q)) \\ \pm 1 \end{pmatrix} \exp(-inq) + \beta \begin{pmatrix} \exp(i\phi(q)) \\ \pm 1 \end{pmatrix} \exp(inq). \tag{1.38}$$

Les coefficients de superposition $\alpha$ et $\beta$ doivent avoir un module égal, pour des raisons de réciprocité. On prolonge formellement la chaîne par un site virtuel B à gauche, avec le numéro $n = 0$ et un site virtuel A à droite, avec le numéro $n = N + 1$. Les conditions aux limites sont que la fonction d'onde s'annule sur ces sites supplémentaires. Pour voir cela, nous utilisons le fait que les deux ondes de volume sont des modes propres de la chaîne infinie, avec la même valeur propre $\omega^2 - \omega_0^2$. La matrice dynamique finie est isolée du reste de la chaîne infinie lorsque $B_0 = A_{N+1} = 0$ (avec $N = 2$ dans l'exemple suivant) :

$$\left(\begin{array}{cc|cccc|cc} 0 & v & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v & 0 & w & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \boxed{w} & 0 & v & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 0 & w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w & 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v & 0 & \boxed{w} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w & 0 & v \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} A_0 \\ \boxed{B_0} \\ \hline A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ \hline \boxed{A_3} \\ B_3 \end{array}\right) = (\omega^2 - \omega_0^2) \left(\begin{array}{c} A_0 \\ \boxed{B_0} \\ \hline A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ \hline \boxed{A_3} \\ B_3 \end{array}\right). \tag{1.39}$$

À partir de la condition aux limites gauche ($B_0 = 0$), on en déduit que les amplitudes sur chaque site sont

$$\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} \sin(nq + \phi(q)) \\ \pm \sin nq \end{pmatrix}. \tag{1.40}$$

La condition aux limites à droite ($A_{N+1} = 0$) implique $\sin((N+1)q+\phi(q)) = 0$. Nous obtenons ainsi une condition sur le nombre d'onde qui est alors

$$(N+1)q + \phi(q) = m\pi, m = 1 \cdots N. \tag{1.41}$$

Le nombre de solutions de cette équation dépend de la phase $\phi(q)$. Si $\phi(q)$ varie autour de $0$ comme dans le cas $w/v < 1$ alors il y a exactement $N$ solutions par bande. Si $\phi(q)$ varie sur une plage de $2\pi$ comme dans le cas $w/v > 1$, alors il n'y a que $N-1$ solutions par bande et donc au total 2 modes propres "manquants" qui doivent être les modes de bord. Delplace *et al.* [46] donnent l'estimation plus précise de l'émergence des modes de bord :

$$\frac{w}{v} > \frac{N+1}{N}. \tag{1.42}$$

La limite $w/v > 1$ est atteinte lorsque $N$ devient très grand.

Les modes manquants peuvent être identifiés en considérant la structure de bande complexe lorsque $w > v$. En effet, toutes les fréquences de propagation ayant été identifiées, les modes manquants doivent se situer dans la gamme de fréquences évanescentes. En supposant qu'ils soient dans la bande interdite, alors le nombre d'onde devient complexe et peut être écrit $q = \pi \pm i\kappa$, signifiant que la partie réelle reste au bord de la zone de Brillouin tandis que la partie imaginaire s'éloigne des bandes de propagation. Par ailleurs, $\exp(\imath nq) = (-1)^n \exp(\mp n\kappa)$ et $\exp(-\imath nq) = (-1)^n \exp(\pm n\kappa)$. La matrice dynamique devient

$$D(q) = \begin{pmatrix} 0 & -(w\exp(\mp\kappa) - v) \\ -(w\exp(\pm\kappa) - v) & 0 \end{pmatrix} \tag{1.43}$$

et la relation de dispersion complexe devient

$$(\omega^2 - \omega_0^2)^2 = v^2 + w^2 - 2vw\cosh\kappa = \rho^2(\kappa), \tag{1.44}$$

conduisant à une paire de valeurs propres $\pm\rho(\kappa)$. Notons que $w\exp(\kappa) > w\exp(-\kappa) \geq v$ avec égalité uniquement au centre de la bande interdite (auquel cas $\rho(\kappa) = 0$). La structure de bande complexe correspondante tracée sur la Figure 1.20a est obtenue en posant

$$\cosh\kappa(\omega) = \frac{v^2 + w^2 - (\omega^2 - \omega_0^2)^2}{2vw}, \tag{1.45}$$

conduisant à une paire de valeurs de $\kappa(\omega)$ avec des signes opposés. L'une de ces ondes évanescentes diminue vers la droite (Figure 1.20b) tandis que l'autre diminue vers la gauche (Figure 1.20c). Au centre de la bande interdite, seuls les sites A sont actifs pour les modes propres évanescents décroissants à gauche, tandis que seuls les sites B sont actifs pour les modes propres évanescents décroissants à droite.

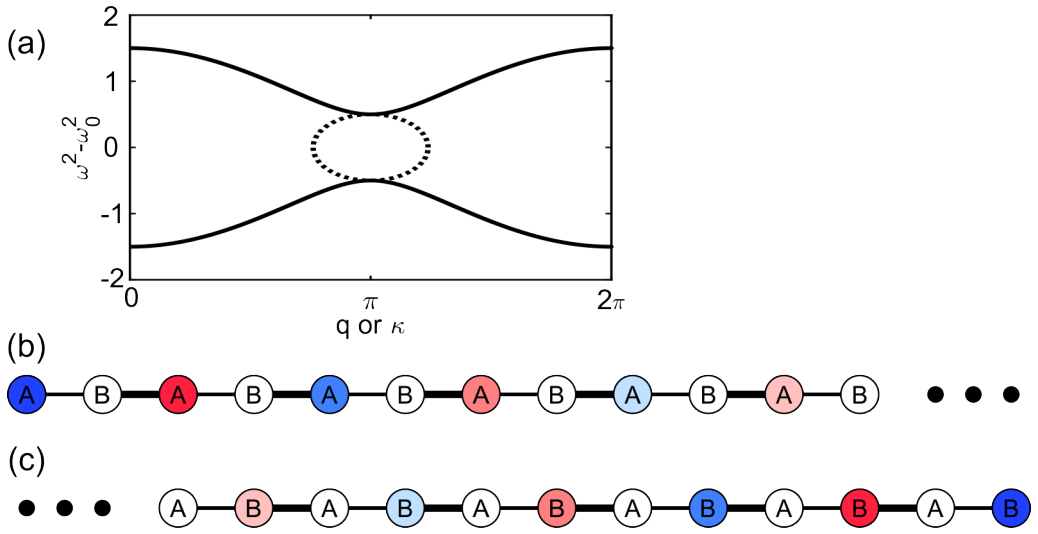



FIGURE 1.20 – Apparence des modes de bords dans la bande interdite. (a) Structure de bande complexe pour $(v, w) = (0.5, 1)$. Les pointillés correspondent aux deux branches imaginaires qui joignent les bords de la bande interdite. (b) Mode propre évanescent à gauche. (c) Mode propre évanescent à gauche.

La superposition des deux modes propres de volume évanescents contra-propagatifs donne les amplitudes au $n$-ème site

$$\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} we^{\kappa} - v \\ \pm(we^{-\kappa} - v) \end{pmatrix} (-1)^n e^{(N+1-n)\kappa} - \beta \begin{pmatrix} we^{-\kappa} - v \\ \pm(we^{\kappa} - v) \end{pmatrix} (-1)^n e^{n\kappa}.$$

Les conditions aux limites imposent alors une paire de relations linéaires entre $\alpha$ et $\beta$, et conduisent à la condition de compatibilité

$$v \sinh\left(\frac{1}{2}(N+1)\kappa\right) = w \sinh\left(\frac{1}{2}N\kappa\right). \tag{1.46}$$

Ceci est une équation implicite donnant la valeur autorisée de $\kappa$. À la limite $N \to \infty$, nous avons $\exp(-\kappa) \to v/w$ et $\cosh\kappa \to \frac{v^2+w^2}{2vw}$. Par conséquent $\rho(\kappa) \to 0$ et les modes de bord apparaissent à ou près de la fréquence centrale de la bande interdite.

### 1.3.3/ MODÈLE ACOUSTIQUE

Le modèle SSH présenté dans la sous-section précédente est adapté à un système à degrés de libertés discrets inspiré de la physique quantique. Dans le contexte de la physique des ondes classique, il existe un milieu continu au sein duquel les ondes se propagent. Ainsi, nous ne pouvons espérer réaliser que des expériences quasi-SSH [89, 92, 102]. Le premier élément nécessaire est un résonateur avec une fréquence de résonance bien définie associée à un champ modal jouant le rôle de degré de liberté. Le second élément requis est un coefficient de couplage réel, pour lequel l'analogue

mécanique est un ressort. Cependant, celui-ci doit être suffisamment ”court” pour ne pas entraîner de retard de phase lorsque les ondes passent d'un résonateur à un autre.

En acoustique, ce résonateur peut être une cavité fermée, comme celles visibles sur la Figure 1.21. Afin que toutes les cavités aient le même spectre, il est nécessaire qu'elles soient identiques. Leur première résonance est imposée par leur plus grande dimension, en l'occurrence leur largeur. Les cavités sont liées entre elles par de très petites ouvertures afin de limiter le retard de phase. Elles peuvent être de différentes largeurs, à savoir 2 % ou 5 % de la largeur d'une cavité dans l'exemple présenté. Elles correspondent aux amplitudes de couplages $v$ et $w$. Avec ce dispositif, et en supposant qu'un tel assemblage périodique soit rempli d'air, il est possible de tracer la structure de bandes qui y est associée. La Figure 1.21 montre la structure de bande obtenue en prenant $(v, w) = (5, 5)$, à noter que ces valeurs correspondent seulement à la largeur des ouvertures, et non à l'amplitude de couplage qui reste inconnue.

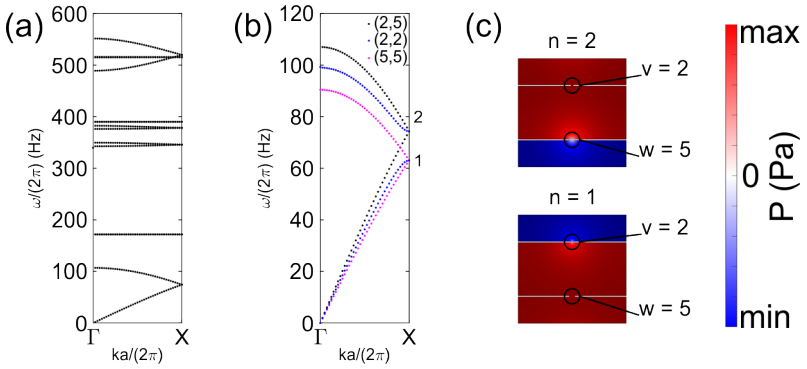



FIGURE 1.21 – Modèle acoustique quasi-SSH. (a) Structure de bande associée à un résonateur dont les amplitudes de couplage sont $(v, w) = (5, 5)$. (b) Un agrandissement sur les fréquences correspondant aux deux premières bandes montre l'ouverture de la bande interdite lorsque les amplitudes de couplages sont différentes. (c) Modes propres correspondant aux points 1 et 2 de la structure de bandes (b).

En introduisant une asymétrie telle que $(v, w) = (2, 5)$ ou $(v, w) = (5, 2)$, comme montré sur la Figure 1.21, nous observons l'ouverture d'une bande interdite. En considérant maintenant le cas d'une chaîne de 8 résonateurs, nous pouvons relever les différentes fréquences propres de cette structure, visibles sur la Figure 1.22. Nous observons que les sept premières fréquences propres sont distribuées le long de la première bande de manière uniforme en fonction du nombre d'onde. La huitième fréquence propre, quant à elle, se situe dans la bande interdite. Les fréquences propres suivantes sont ensuite distribuées le long de la bande suivante. La carte de champ du mode propre associé à la huitième fréquence propre nous permet de constater qu'il s'agit bien d'un mode de bord, même s'il apparaît que son confinement au bord ne semble pas être très efficace.

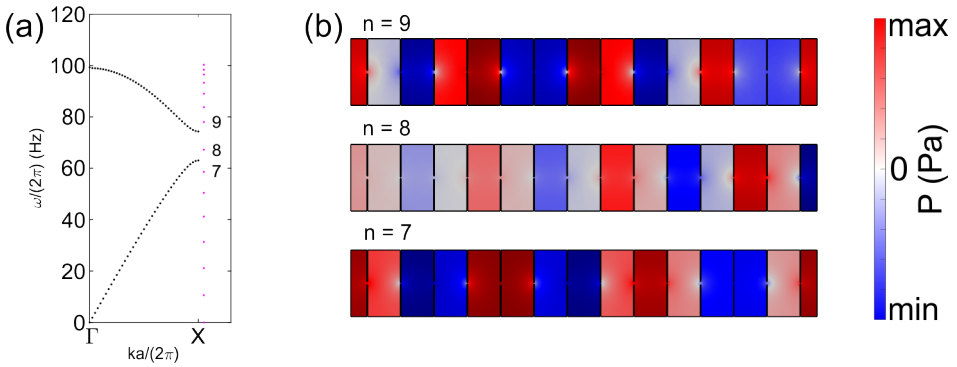



FIGURE 1.22 – Modèle acoustique quasi-SSH dans le cadre d'une chaîne de 8 résonateurs. (a) Structure de bandes obtenue lorsque $(v, w) = (2, 5)$ et illustration des fréquences propres de la chaîne. (b) Champs de pression modaux associés aux septième, huitième et neuvième modes, mettant en évidence que le huitième mode correspond à un mode de bord.

Ce mode de bord existant aussi bien dans le cas où $(v, w) = (2, 5)$ que dans le cas où $(v, w) = (5, 2)$,la question qui peut se poser est de savoir ce qu'il se produirait si une chaîne de résonateurs pour laquelle $(v, w) = (2, 5)$ et une pour laquelle $(v, w) = (5, 2)$ étaient placées côte à côte, de manière à n'en former qu'une seule et que les modes de bords de ces chaînes soient localisés dans la même cavité. La Figure 1.23 présente le champ de pression modal d'une telle chaîne pour le mode propre situé dans la bande interdite.

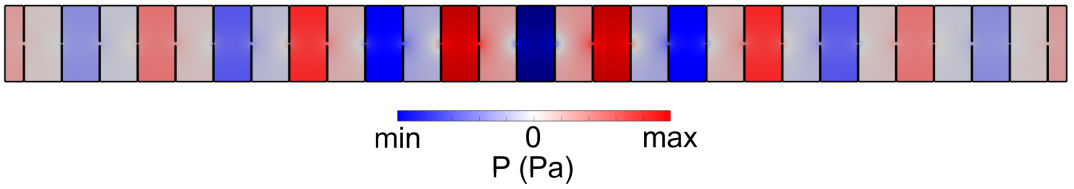



FIGURE 1.23 – Champ de pression modal associé au mode propre situé dans la bande interdite.

Nous remarquons que nous obtenons cette fois un mode d'interface entre les deux chaînes. Il paraît donc cohérent que des cristaux phononiques présentant une bande interdite puisse présenter un comportement topologique similaire. C'est sur ce principe que nous avons réalisé les travaux présentés dans cette thèse.

# 2

# CRISTAL TOPOLOGIQUE POUR DES ONDES DE GRAVITÉ-CAPILLARITÉ

Si de nombreuses expériences incluant des cristaux phononiques de géométrie semblable à celle du graphène [54, 67] ont déjà été réalisées, elles se sont principalement concentrées dans des situations pour lesquelles la dispersion des milieux était ou absente, ou négligée, en particulier dans les domaines de l'optique [51, 58, 61], de l'acoustique [66, 74, 80, 86], des micro-ondes [36, 77] et de la mécanique [70, 72, 82, 85, 87, 88, 100, 101]. Cette supposition n'étant pas valable pour une grande part des domaines physiques pour lesquelles des applications de la physique topologique sont envisageables, il convient de vérifier leur pertinence pour un système fortement dispersif, tel que les ondes de gravité-capillarité à la surface de l'eau [4, 5, 95] que nous nous proposons d'étudier dans ces premiers travaux [97]. Si ces ondes ont fait l'objet de nombreuses études dans des cas à une dimension [45, 56, 83, 90, 91, 99], les cas à deux dimensions restent peu étudiés [95]. Pour ce faire, nous commencerons par étudier le matériel à notre disposition et les contraintes physiques qui en découlent, nous serons alors en mesure de concevoir un cristal présentant une bande interdite pouvant être observée expérimentalement, ce qui correspond à l'étape préliminaire à la conception d'un cristal présentant un comportement topologique. Une fois que nous aurons obtenu des résultats numériques satisfaisants, nous pourrons procéder aux premières expérimentations.

## 2.1/ DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL

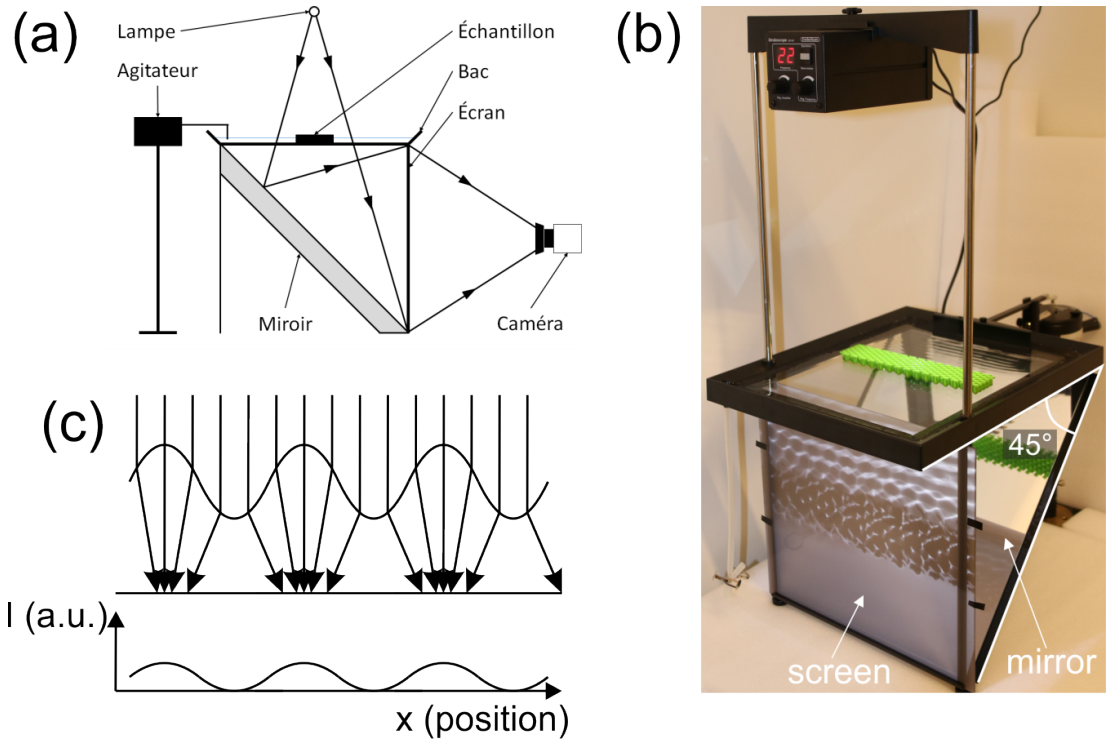



FIGURE 2.1 – Schéma (a) et photo (b) du dispositif expérimental, consistant en une cuve à ondes standard regroupant un bac rectangulaire, un miroir, une lampe, un agitateur mécanique, un écran et une caméra. L'échantillon étudié est placé au centre du bac de dimensions 25x34 $cm^2$, l'agitateur mécanique équipé d'un balai plan de 10 cm de long est placé à une extrémité du bac. L'agitateur est synchronisé avec la lampe située au dessus du bac afin d'obtenir un éclairage stroboscopique de la zone d'étude. L'image résultante est projetée sur un écran par l'intermédiaire du miroir incliné à 45°. L'image obtenue est finalement enregistrée par la caméra placée devant l'écran. (c) Principe d'imagerie des vagues présentes à la surface de l'eau mettant en lumière l'origine des zones claires et sombres de l'image projetée sur l'écran.

Le dispositif expérimental qui sera utilisé pour observer et imager les ondes de surface dans l'eau est décrit par la Figure 2.1. La lumière émise par une source modulée en fréquence atteint l'interface entre l'eau et l'air, traverse la fine profondeur d'eau et atteint l'écran d'observation après réflexion sur un miroir. Une interprétation possible de l'observation de lignes brillantes sur l'écran est de lier ce phénomène aux crêtes des vagues qui se comportent comme des lentilles collectrices cylindriques, alors que les ombres sont liées aux creux des vagues qui se comportent comme des lentilles divergentes. Ainsi, c'est la courbure de la surface qui peut être observée, comme illustré sur la Figure 2.1 [38, 37].

Cependant, les phénomènes à l'œuvre sont généralement beaucoup plus complexes et la relation entre le motif lumineux visible sur l'écran et l'élévation des vagues au dessus du niveau moyen de l'eau n'est pas simple [1]. En réalité, cela devrait être décrit comme l'in-

tersection d'une caustique tri-dimensionnelle avec le plan de projection, tout en prenant en compte le flou dû à l'extension de la source et à la dispersion chromatique [8]. Malgré tout, cette démarche est surtout utilisée pour des vagues avec des interfaces fortement courbées, ce qui est le cas pour de courtes longueurs d'ondes couplées à une amplitude importante [49], et pour des cas impliquant des interactions entre de multiples vagues [8]. Dans notre cas , faisant intervenir des vagues de très faible amplitude dans notre cristal et au-delà, les motifs d'ombre et de lumière ne sont pas affectés de manière significative par ces limitations et sont en lien direct avec la courbure de la surface, permettant une extraction aisée des ondulations au moyen d'un traitement d'images.

## 2.2/ COMPORTEMENT DE L'EAU DANS LES CONDITIONS EXPÉRIMENTALES

Les ondes de gravité-capillarité sont des ondes de surface résultant de l'équilibre entre l'énergie potentielle des forces de gravité et de la tension de surface avec l'énergie cinétique d'une colonne d'eau. En raison des contributions de la masse d'eau et de l'interface eau-air, leur vélocité est isotrope mais intrinsèquement fortement dispersive et dépend fortement de la profondeur d'eau. Dans le but de décrire la propagation des ondes de gravité-capillarité dans le régime des petites variations de hauteur d'eau (en comparaison de la profondeur), nous considérons la théorie des écoulements à potentiel de vitesse [22, 23, 24]. Nous supposons dans un premier temps que la propagation des vagues a lieu dans une eau non visqueuse, dont le comportement est linéaire et irrotationnel. Dans ce cas, le vecteur de vitesse dérive du potentiel de vitesse selon $\mathbf{v} = \nabla\Phi$. Pour le dispositif décrit sur la Figure 2.1, nous pouvons appliquer la méthode de séparation des variables pour écrire [11, 22]

$$\Phi(x, y, z, t) = Re\left[\phi(x, y)\cosh(\kappa(z + h))\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\right], \tag{2.1}$$

avec l'interface eau-air à z = 0. Par cette opération, nous passons d'un problème en trois dimensions à un problème en deux dimensions. En l'absence de forces externes, le déplacement vertical de l'interface eau-air $\eta(x, y)$ satisfait alors l'équation aux dérivées partielles de dimension 2

$$\nabla \cdot \left(c_p c_g \nabla\eta\right) + \kappa^2 c_p c_g \eta = 0, \tag{2.2}$$

avec $c_p$ la vitesse de phase, $c_g$ la vitesse de groupe et $\kappa = 2\pi/\lambda$ le nombre d'onde, avec $\lambda$ la longueur d'onde. Une équation similaire est satisfaite par la partie horizontale du potentiel de vitesse [22]. Nous rappelons [3, 18, 2, 16] que la relation de dispersion entre le nombre d'onde et la fréquence angulaire $\omega$ pour une interface eau-air horizontale est

donnée par

$$\omega^2 = g\kappa\left(1 + d_c^2\kappa^2\right)\tanh(\kappa h), \tag{2.3}$$

avec $g = 9,81$ m·s$^{-1}$ l'accélération normale de la pesanteur terrestre, $h$ la profondeur d'eau et $d_c$ la longueur capillaire. La vitesse de phase est alors décrite par

$$c_p = \frac{\omega}{\kappa} = \sqrt{\frac{g}{\kappa}\left(1 + d_c^2\kappa^2\right)\tanh(\kappa h)}, \tag{2.4}$$

et la vitesse de groupe par

$$c_g = \frac{d\omega}{d\kappa} = \left(\frac{1}{2} + \frac{d_c^2\kappa^2}{1 + d_c^2k^2} + \frac{\kappa h}{\sinh(2\kappa h)}\right)c_p, \tag{2.5}$$

où la longueur capillaire est donnée par

$$d_c = \sqrt{\frac{\gamma}{g\rho}}, \tag{2.6}$$

avec $\gamma = 0,0735$ N·m$^{-1}$ la tension de surface dans les conditions normales de pression et de température et $\rho = 1000$ kg· m$^{-3}$ la masse volumique de l'eau.

Ce qui peut être remarqué au vu des expressions de $c_p$ et $c_g$, permettant la résolution de l'équation (2.2), est qu'il est nécessaire de connaître à la fois la fréquence d'excitation et la longueur d'onde des vagues produites. Notre dispositif ne permettant de contrôler que la fréquence, la longueur d'onde doit être déterminée soit de manière expérimentale, soit au moyen d'une approximation, ce qui implique de savoir quelle est la relation liant la longueur d'onde à la fréquence d'excitation. Pour ce faire, nous considérons $\gamma = 0,0735$ N·m$^{-1}$ et $h = 0,0073$ m, ce qui correspond à la hauteur d'eau obtenue en versant 500 ml d'eau dans le bac utilisé. La fréquence de fonctionnement de l'agitateur mécanique utilisé s'étendant de 10 à 75 Hz, et la vitesse de phase des ondes de gravité-capillarité se situant aux alentours de 30 cm·s$^{-1}$, nous en déduisons que la longueur d'onde des vagues observées doit être comprise entre 4 mm et 3 cm, si nous ne prenons pas en compte les effets de dispersion. Une fois injectées dans la relation de dispersion, nous obtenons les fréquences d'excitations correspondant aux différentes longueurs d'ondes considérées. Ces résultats sont approchés par une fonction de la forme $\lambda = Kf^{-n}$ dont les résultats sont présentés sur la Figure 2.2.

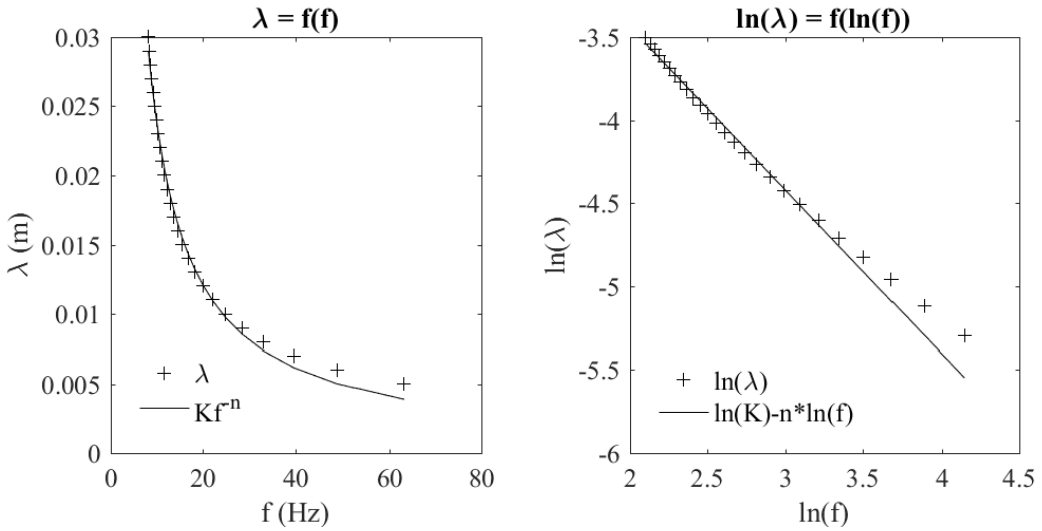



FIGURE 2.2 – Évolution de la longueur d'onde en fonction de la fréquence d'excitation. (+) Résultats obtenus à partir de la relation de dispersion, (-) résultats obtenus à partir de l'approximation.

Nous constatons une approximation correcte de la relation $\lambda = f(f)$ pour des fréquences d'excitation comprises entre 10 et 30 Hz, nous privilégierons donc cette plage de fréquence pour nos expériences et nos simulations.

L'étape suivante de notre démarche est l'identification des paramètres ayant une influence sur le comportement des ondes de gravité-capillarité. Pour ce faire, nous réécrivons l'équation (2.3) sous la forme suivante :

$$\frac{1}{2}\rho\omega^2 h^2 = \frac{1}{2}\left(\rho g\kappa + \gamma\kappa^3\right)\tanh(\kappa h)h^2, \tag{2.7}$$

qui permet de faire apparaître, dans le terme de gauche, l'énergie cinétique, et dans le terme de droite, l'énergie potentielle. Cette dernière est le résultat de deux contributions, celle de la gravité est celle de la capillarité. Ce qui peut être déduit de cette expression, c'est qu'il est possible que l'une des deux contributions domine le comportement des ondes de surface. Afin de déterminer si c'est le cas pour nos expérimentations, il est nécessaire de connaître la longueur d'onde capillaire définie par :

$$l_c = 2\pi d_c. \tag{2.8}$$

Les longueurs d'onde dont l'ordre de grandeur est supérieur au résultat obtenu correspondent à un comportement dominé par la gravité, et pour un ordre de grandeur inférieur, le comportement des ondes est dominé par la capillarité. Dans le cas où $\gamma = 0,0735$ N·m$^{-1}$, la valeur obtenue est $l_c = 1,7$ cm. Ainsi, dans le cadre de nos expériences faisant appel à des longueurs d'onde comprises entre 7 mm et 2 cm, d'après

les résultats visibles sur la Figure 2.2, nous nous trouvons dans un cas de figure où ni la gravité, ni la capillarité ne dominent le comportement des ondes observées. Nous devons donc prendre en compte l'ensemble des variables présentes dans la relation de dispersion (2.3). Il apparaît ainsi que les deux paramètres influents sont la profondeur d'eau $h$ et la tension de surface $\gamma$, qui agissent tous deux sur la vitesse de phase des ondes.

Parmi ces deux variables, la seule maîtrisée lors des expériences est la profondeur d'eau, par l'intermédiaire du volume d'eau placé dans le bac. Le bac utilisé pouvant contenir une profondeur d'eau de 10 mm, nous considérons trois hauteurs d'eau, de 1, 5 et 10 mm. La tension de surface quant à elle dépend de la qualité de l'eau utilisée, notamment de la présence de poussières, de minéraux ou d'éventuels additifs. C'est pourquoi nous utiliserons par la suite de l'eau distillée. La tension de surface retrouvée dans la littérature pour l'eau l'établit à $\gamma = 0,0735$ N·m$^{-1}$, mais selon la présence ou non d'impuretés, cette valeur peut fortement varier. Nous considérons donc des valeurs de tension de surface de 0,01, 0,05, 0,0735 et 0,1 N·m$^{-1}$. Les résultats obtenus pour chacune de ces valeurs sont présentés sur la Figure 2.3.

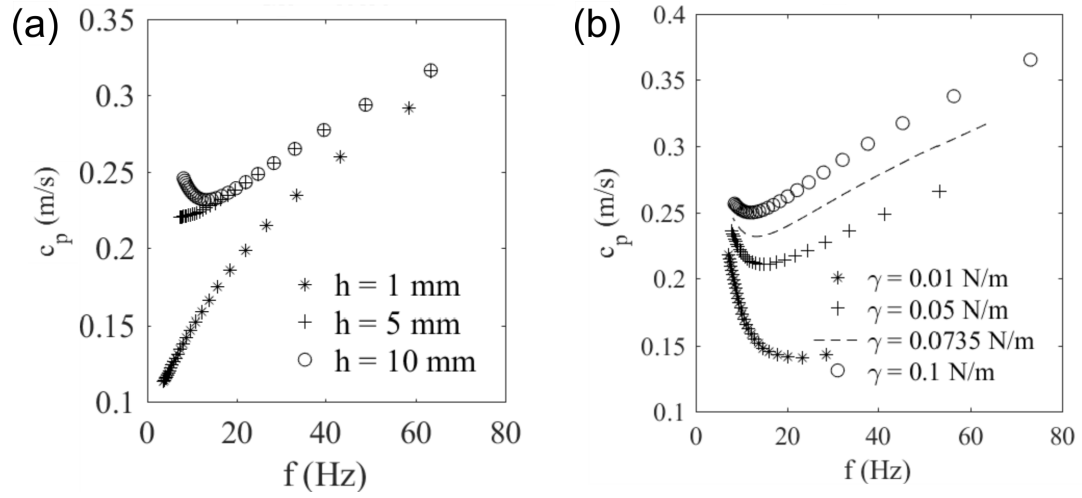



FIGURE 2.3 – (a) Évolution de la vitesse de phase en fonction de la hauteur d'eau pour $\gamma = 0,0735$ N·m$^{-1}$. (b) Évolution de la vitesse de phase en fonction de la tension de surface et de la fréquence d'excitation pour $h = 7$ mm.

D'après ces résultats, pour la gamme de fréquence qui nous intéresse, on constate que la profondeur d'eau n'a plus d'influence sur la vitesse de phase lorsqu'elle est supérieure à 5 mm. En revanche, on remarque une influence beaucoup plus marquée en ce qui concerne la tension de surface, avec une absence de convergence des résultats. Nous en déduisons que le paramètre ayant le plus d'influence sur le comportement des ondes étudiées est la tension de surface, et que c'est la valeur de ce paramètre que nous chercherons à déterminer avant de procéder à des mesures sur les échantillons cristallins.

Le comportement de l'eau étant à présent décrit, il nous reste à discuter l'influence des

obstacles pouvant être présents dans le bac. Nous n'utiliserons ici que des obstacles émergés de type piliers, nous pouvons donc considérer des conditions aux interfaces de Neumann, c'est à dire

$$\frac{\partial \eta}{\partial n} = 0, , \tag{2.9}$$

avec $n$ la normale à l'interface [22, 23, 24].

## 2.3/ CONCEPTION D'UN CRISTAL PRÉSENTANT UNE BANDE INTERDITE

Dans un premier temps, avant de procéder à la conception de notre cristal, nous voulons vérifier la validité de notre modèle en comparant le profil de diffraction d'un train d'ondes planes avec une fréquence d'excitation de 20 Hz par un obstacle cylindrique, pour une hauteur d'eau de 7 mm et une tension de surface de 0,0735 N·m$^{-1}$. Nous modélisons d'abord cette situation au moyen de COMSOL MultiPhysics ®, avant de réaliser les essais correspondants. Les résultats obtenus sont présentés sur la Figure 2.4.

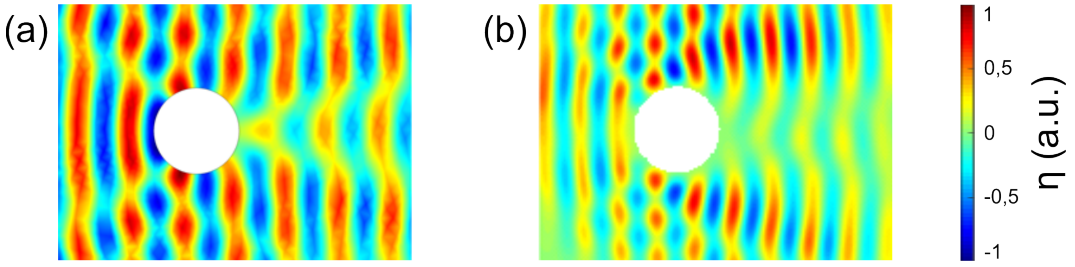



FIGURE 2.4 – Diffraction d'un train d'ondes planes par un cylindre de 2 cm de diamètre pour une fréquence d'excitation de 20 Hz. (a) Résultat numérique. (b) Résultat expérimental.

Il en ressort une corrélation acceptable entre le résultat numérique et le résultat expérimental.

### 2.3.1/ GÉOMÉTRIE DU CRISTAL ÉTUDIÉ

Nous reprenons une géométrie ayant déjà été étudiée dans le cadre d'ondes de volume et dont le comportement topologique a déjà été mis en évidence [86]. Il s'agit d'un réseau composé de cellules hexagonales avec des inclusions triangulaires. Par la suite, nous notons $a$ le paramètre de maille, $b$ la longueur d'un côté des inclusions triangulaires et $\alpha$ l'orientation d'une pointe donnée des inclusions par rapport à la direction de propagation des ondes planes, comme montré sur la Figure 2.5.

Notre objectif dans un premier temps est d'obtenir la bande interdite la plus large possible pour notre cristal. Nous devons donc calculer les structures de bande relatives à différents jeux de paramètres, et en déduire les paramètres géométriques optimaux. Le premier paramètre que nous pouvons aisément fixer est le paramètre de maille. En effet, nous avons vu précédemment que l'approche de la relation $\lambda = f(f)$ par une fonction de la forme $Kf^{-n}$ est correcte pour une gamme de fréquences comprise entre 10 Hz et 30 Hz. Les longueurs d'ondes correspondant à ces fréquences se situent entre 7 mm et 2 cm. Le mécanisme d'ouverture d'une bande interdite dans le cas de notre cristal étant le fait de résonances multiples de Bragg, la fréquence centrale de la bande interdite correspondra à celle dont la longueur d'onde vérifiera la relation $\lambda = 2a$. Idéalement, nous souhaiterions que la bande interdite soit centrée sur la fréquence médiane de notre gamme de fréquences étudiées, c'est à dire centrée autour de 20 Hz, ce qui correspond à une longueur d'onde d'environ 1 cm, portant le paramètre de maille nécessaire à $a = 5$ mm.

L'inconvénient de ce choix est que les échantillons étant réalisés au moyen d'impression 3D avec filament, il est nécessaire de lier les différents piliers entre eux au moyen de barres solides, qui empêcheront la visualisation des ondes au sein du cristal. Une solution peut être d'augmenter le paramètre de maille sans augmenter les dimensions des liaisons, ce qui aura pour conséquence de diminuer la fréquence centrale de la bande interdite, tout en entraînant la possibilité que la bande interdite débute pour une fréquence plus basse que celle par laquelle nous sommes limités par notre agitateur mécanique, à savoir 10 Hz.

Ainsi, en prenant un paramètre de maille de 1 cm, la fréquence centrale de la bande interdite se situerait autour de 12 Hz, ce qui est trop proche de notre limite. En prenant un paramètre de maille $a = 8$ mm, la fréquence centrale est plus proche de 15 Hz, ce qui est plus acceptable, tout en permettant l'observation du comportement des ondes au sein du cristal. Nous fixons ainsi notre premier paramètre géométrique. Les deux autres nécessitent d'abord le calcul des structures de bandes correspondantes.

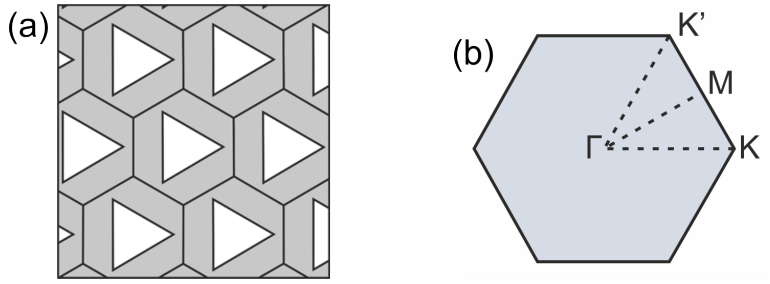



FIGURE 2.5 – (a) Aperçu du premier design du cristal étudié. La pointe de l'inclusion retenue pour la détermination de $\alpha$ est celle se trouvant le plus à droite. Par la suite, toutes les figures présentées considéreront les ondes planes comme se déplaçant de la gauche vers la droite. (b) Zone de Brillouin du cristal étudié.

### 2.3.2/ RELATION DE DISPERSION

À l'intérieur du cristal artificiel, l'équation (2.2) peut être utilisée pour obtenir les ondes de Bloch et ainsi en déduire la structure de bandes. En effet, l'équation (2.2) peut être réécrite comme une équation de Helmholtz pour les ondes scalaires dans un milieu dispersif

$$\nabla \cdot (A(\omega)\nabla\eta) + \omega^2 B(\omega)\eta = 0, \tag{2.10}$$

avec les coefficients $A(\omega) = c_p c_g$ et $B(\omega) = c_g/c_p$ dépendant explicitement de la fréquence. Une condition aux limites de Neumann est considérée aux interfaces entre l'eau et les piliers, c'est à dire que $\partial\eta/\partial n = 0$, avec $n$ la normale à l'interface. Les ondes de Bloch sont de la forme

$$\eta(x, y) = \eta_k(x, y)\exp(ik \cdot r), \tag{2.11}$$

avec $k$ le vecteur d'onde de Bloch et $\eta_k$ la composante périodique de l'onde de Bloch.

Calculer les valeurs propres et les fonctions propres pour obtenir les ondes de Bloch du cristal n'est pas simple en raison de la dépendance des coefficients de l'équation à la fréquence. Nous choisissons donc d'utiliser une méthode d'excitation stochastique proposée par Laude et Korotyaeva [93] pour obtenir la structure de bande du cristal étudié via une implémentation par éléments finis de l'équation (2.10). L'utilisation de cette méthode permet de contourner le problème de la dépendance de l'équation (2.10) à la fréquence en fixant à la fois la fréquence $\omega$ et le vecteur d'onde de Bloch $k$, et en observant la réponse du système à une force spatiale stochastique de la forme

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) = f_s(\mathbf{r})\exp\left(i(\omega\mathbf{r} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})\right), \tag{2.12}$$

dans la cellule unitaire. L'observation de la réponse du système permet de déterminer les jeux de paramètres ayant les résultats les plus élevés, correspondant à la présence des modes propres du cristal.

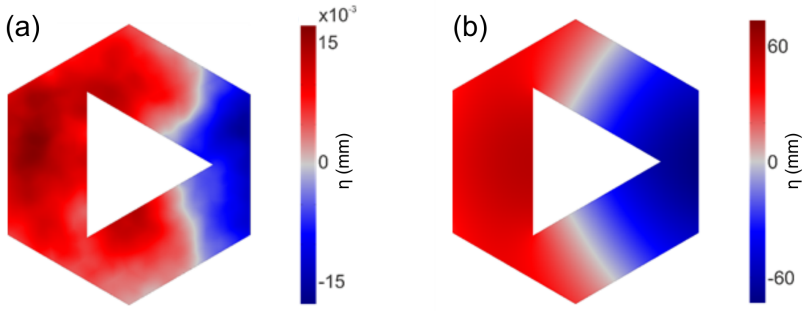



FIGURE 2.6 – (a) Carte de champ obtenue pour une excitation stochastique d'une cellule unitaire au point K ne correspondant pas à un mode propre. (b) Carte de champ obtenue pour une excitation stochastique d'une cellule unitaire au point K correspondant à un mode propre.

L'étape suivante est de déterminer si ce cristal présente une bande interdite comme dans le cas des ondes de volume [86]. Nous reprenons donc les paramètres utilisés par cette étude, à savoir un ratio $b/a = 0,7$ et $\alpha = 10°$, et nous considérons une profondeur d'eau $h = 7,3$ mm et une tension de surface $\gamma = 0,0735$ N·m$^{-1}$. La structure de bandes ainsi obtenue est présentée sur la Figure 2.7.

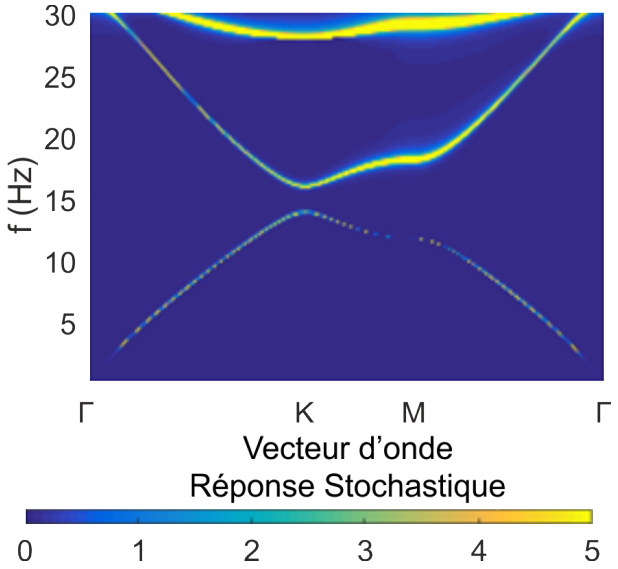



FIGURE 2.7 – Diagramme de dispersion d'un cristal dont les paramètres géométriques sont $a = 8$ mm, $b/a$ = 0,7 et $\alpha = 30°$.

### 2.3.3/ INFLUENCE DES PARAMÈTRES GÉOMÉTRIQUES DU CRISTAL

Notre objectif est maintenant d'obtenir la bande interdite la plus large à la fréquence la plus basse possible. Pour cela, nous faisons varier le ratio $b/a$ et nous modifions l'orientation $\alpha$ des piliers. Nous en déduisons alors l'influence de l'orientation et de la taille des piliers sur la largeur de la bande interdite $\Delta f$ et sur sa fréquence centrale $f_0$. La bande interdite relative étant définie par le rapport entre la largeur de la bande interdite et sa fréquence centrale, on cherche ainsi le ratio $b/a$ ayant la meilleure valeur. Les simulations correspondantes sont réalisées en prenant comme paramètres $\alpha = 10°$, $\gamma = 0,0735$ N·m$^{-1}$ et $h = 7,3$ mm, et en faisant varier $b/a$ entre 0,05 et 0,85. Sur la figure suivante sont présentés la position et la fréquence centrale des bandes interdites ainsi obtenues :

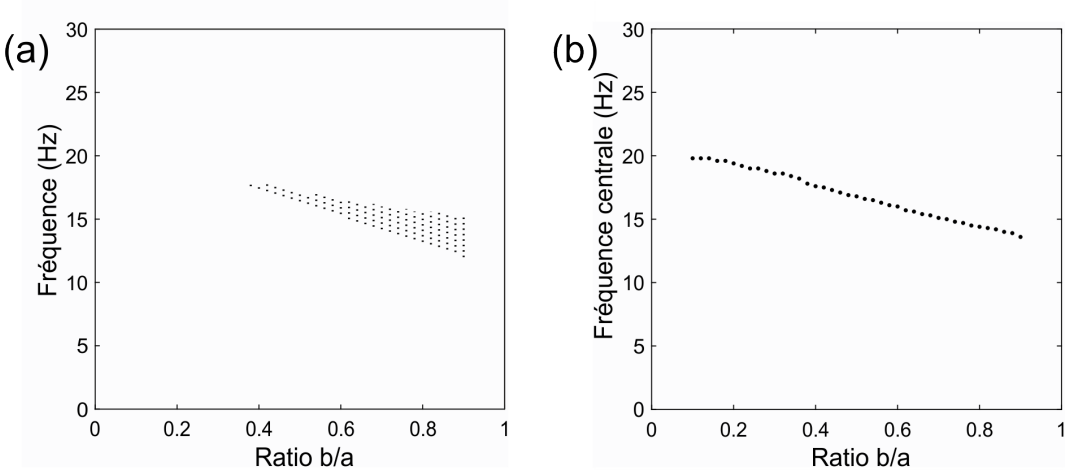



FIGURE 2.8 – (a) Position de la bande interdite en fonction du ratio $b/a$. (b) Position fréquence centrale de la bande interdite en fonction du ratio $b/a$.

Les résultats obtenus indiquent que l'augmentation du ratio $b/a$ entraîne une augmentation de la largeur de la bande interdite, ainsi qu'une réduction de sa fréquence centrale, ce qui a pour conséquence une bande interdite relative plus élevée pour les hauts taux de remplissage. Nous choisissons donc de prendre $b/a = 0,8$ afin d'avoir une bande interdite avec une bande interdite relative élevée, tout en permettant une visualisation des ondes au sein du cristal. Une fois cette valeur choisie, nous faisons varier l'orientation des piliers entre 0° et 60°, les symétries C3v de notre cellule unitaire impliquant une symétrie de comportement autour de 0° modulo 30°. Les résultats obtenus sont visibles sur la Figure 2.9.

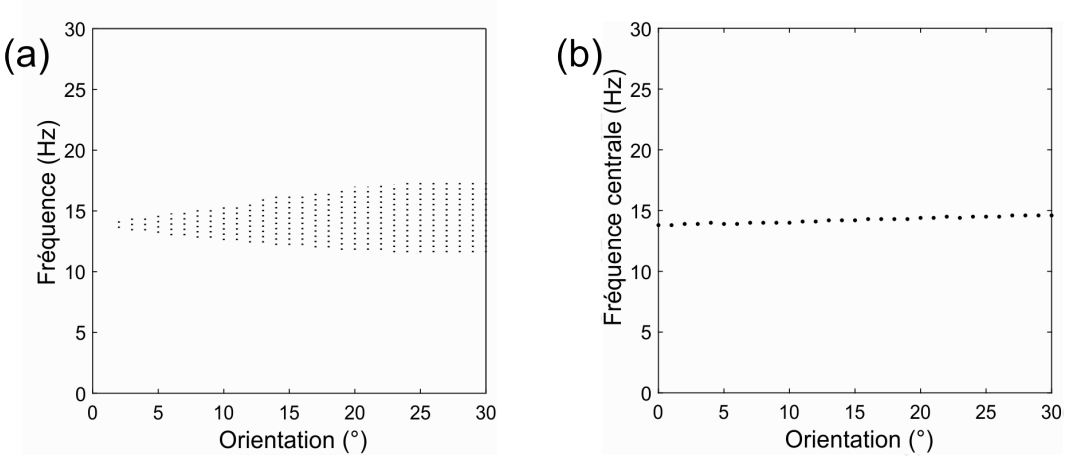



FIGURE 2.9 – (a) Position de la bande interdite en fonction de l'orientation des piliers. (b) Position fréquence centrale de la bande interdite en fonction de l'orientation des piliers.

Nous constatons alors que la largeur de la bande interdite est maximale pour une orientation des piliers de 30°, et que sa fréquence centrale est légèrement plus basse pour une

orientation de 0°. Mais cette dernière étant pratiquement constante, l'efficacité dépend alors surtout de la largeur de la bande interdite, ce qui conduit à conclure que la bande interdite relative est maximale pour une orientation des piliers de 30°.

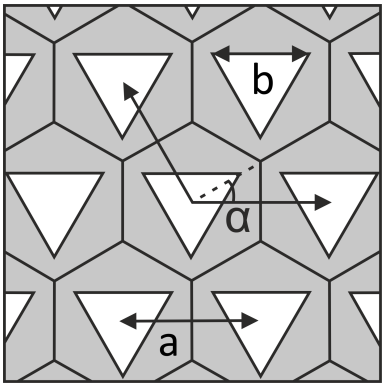



FIGURE 2.10 – Paramètres finaux du cristal utilisé : a = 10 mm, b = 8 mm, $\alpha = 30°$

Les paramètres finaux de notre cristal sont alors les suivants : $a = 8$ mm, $b/a = 0,8$ donc $b = 0,64$ mm et $\alpha = 30°$, tel que présenté sur la Figure 2.10.

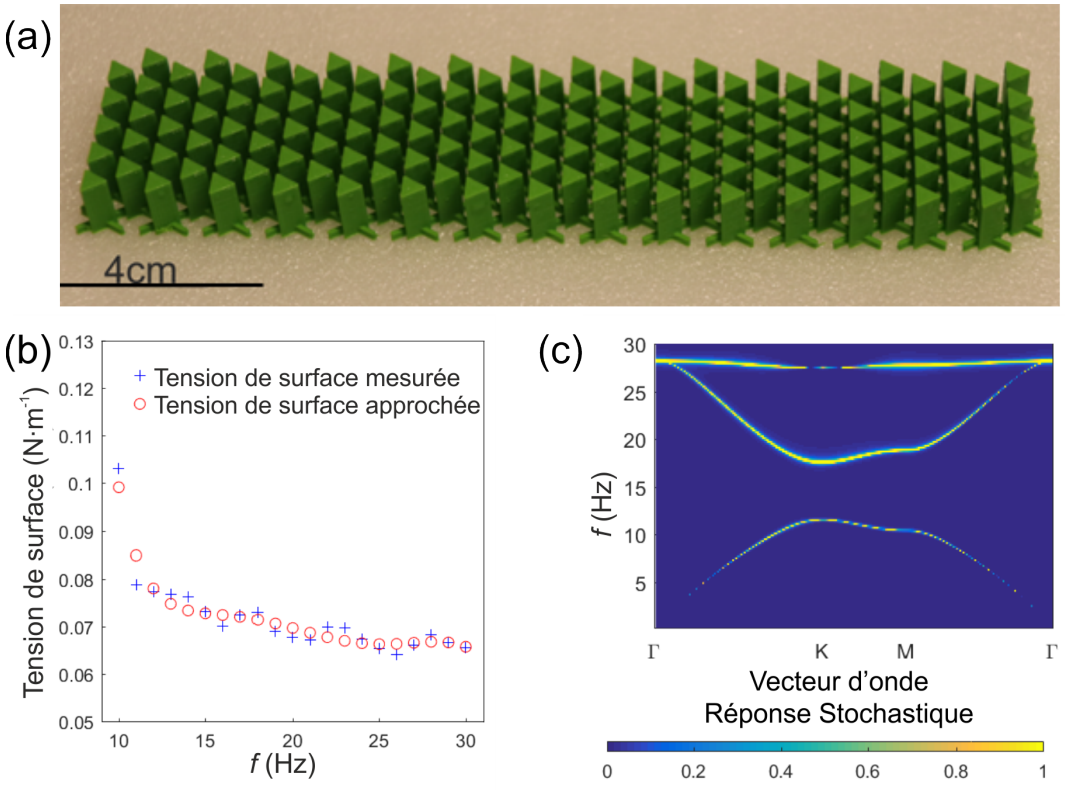



FIGURE 2.11 – (a) Aperçu du cristal en PLA imprimé en 3D. (b) Évolution de la tension de surface en fonction de la fréquence d'excitation. (c) Diagramme de dispersion du cristal étudié.

Une fois l'échantillon correspondant imprimé, nous avons mesuré la longueur d'onde

des ondes de surface dans l'eau de notre bac en l'absence d'échantillon, puis nous en avons déduit la tension de surface correspondante en fonction de la fréquence d'excitation. Nous constatons que la valeur obtenue n'est pas fixe, nous prenons donc la valeur moyenne obtenue pour l'intervalle de fréquences étudié. De cette manière, nous déterminons que $\gamma = 0,0718$ N·m$^{-1}$, nous calculons ensuite la structure de bandes correspondante, comme montré sur la Figure 2.11. Il apparaît alors que nous devrions observer expérimentalement une bande interdite entre 11,4 Hz et 17,4 Hz. Notre agitateur fonctionnant par pas de 1 Hz, l'observation de cette bande interdite se réduit entre 12 Hz et 17 Hz.

### 2.3.4/ VÉRIFICATION EXPÉRIMENTALE DU COMPORTEMENT DE L'ÉCHANTILLON

L'échantillon utilisé est composé de 5 périodes, et lors de nos simulations nous implémentons des couches absorbantes parfaitement adaptées (Perfectly Matched Layer, PML) [14, 55]. D'après le diagramme de transmission obtenu, il apparaît que les fréquences correspondants à la bande interdite présentent une transmission inférieure à $-10$ dB, que nous allons essayer de retrouver dans nos expériences.

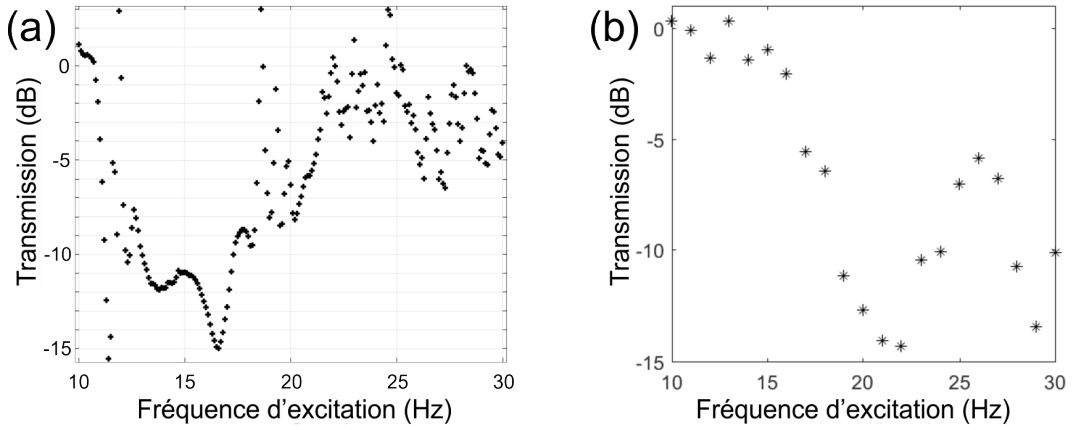



FIGURE 2.12 – (a) Diagramme de transmission obtenu suite aux simulations numériques. (b) Diagramme de transmission obtenu expérimentalement.

Le point important ressortant des premiers résultats présentés sur la Figure 2.12 est que la fréquence centrale de la bande interdite ne semble pas se situer expérimentalement autour de 15 Hz, mais plutôt autour de 21 Hz. Plusieurs éléments permettent d'expliquer cette différence, le premier étant que notre modèle ne tient pas compte de l'influence de la capillarité à l'interface entre les piliers et l'eau. En effet, leur présence entraîne la formation d'un ménisque, la surface de l'eau n'est donc pas plane, même en l'absence d'excitation, mais aussi l'addition d'une contribution supplémentaire au terme d'énergie potentielle de l'équation (2.7).

### 2.3.5/ CORRECTION DU MODÈLE UTILISÉ

Nous ne chercherons pas à modéliser cette contribution, mais nous assumons qu'elle est d'une forme similaire à celle du terme pour l'interface eau-air, et nous remarquons qu'une augmentation de cette tension de surface implique une augmentation de l'énergie potentielle totale pour chaque cellule unitaire du cristal. Étant donné que l'énergie cinétique doit suivre cette augmentation pour chaque solution de l'équation de Helmholtz, la vitesse de phase $\omega/\kappa$ doit croître d'une quantité correspondante. De plus, la présence d'un ménisque modifie le taux de remplissage effectif des cellules unitaires de notre cristal, en augmentant la surface d'eau en leur sein, de même que la profondeur d'eau au voisinage des piliers [65]. Ainsi, en considérant des valeurs effectives de $b/a = 0,6$ et $\gamma_{eff} = 0,17$ N·m$^{-1}$, nous retrouvons une structure de bandes présentant une bande interdite correspondant à celle obtenue expérimentalement pour une orientation des piliers de $\alpha = 30°$, qui se referme lorsque $\alpha = 0°$ tel que montré sur la Figure 2.13. Évidemment, ces valeurs particulières dépendent des paramètres tels que le taux de remplissage, mais aussi des paramètres d'impressions de l'échantillon tels que l'épaisseur d'une couche de polymère, du matériau utilisé, etc... Ce sont donc des paramètres effectifs au sens des métamatériaux, c'est à dire en considérant l'ensemble du cristal. Il en résulte que les équations (2.3) et (2.10) forment un modèle phénoménologique d'un cristal pour les ondes de surface dans l'eau suffisant pour une comparaison qualitative avec l'expérience. Il n'en demeure pas moins qu'un modèle tri-dimensionnel plus précis serait nécessaire pour une analyse quantitative.

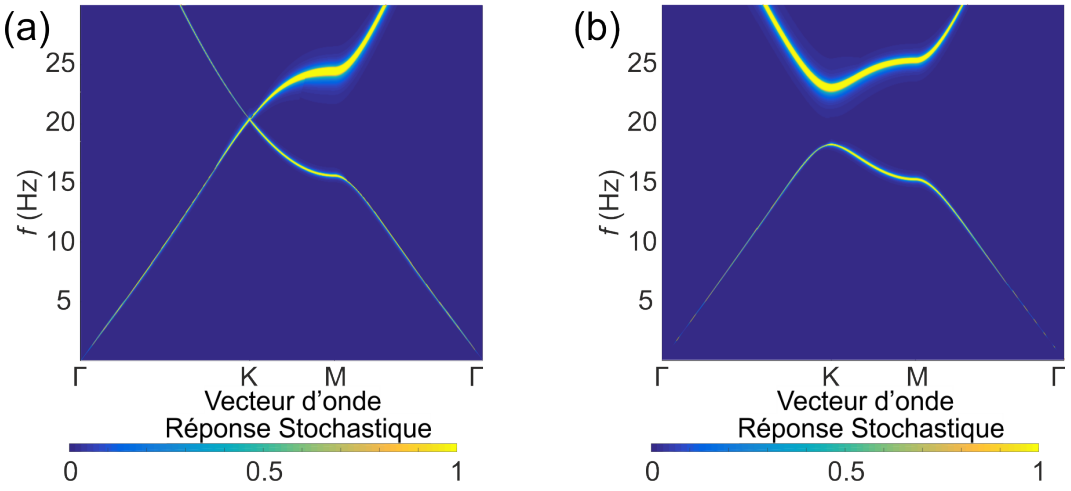



FIGURE 2.13 – (a) Diagramme de dispersion effectif du cristal pour une orientation des inclusions de 0°. (b) Diagramme de dispersion effectif du cristal pour une orientation des inclusions de 30°.

### 2.3.6/ VÉRIFICATION EXPÉRIMENTALE DU COMPORTEMENT DE L'ÉCHANTILLON APRÈS CORRECTION DU MODÈLE NUMÉRIQUE

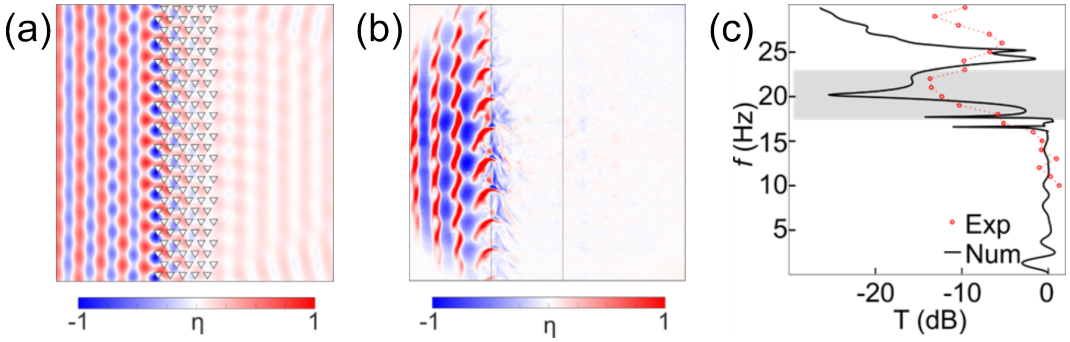



FIGURE 2.14 – (a) Carte de champ d'une simulation pour un cristal à bande interdite complète pour une fréquence d'excitation de 22 Hz. (b) Carte de champ expérimentale pour un cristal à bande interdite complète à la même fréquence. (c) Diagramme de transmission d'un cristal à bande interdite complète.

Nous procédons à nouveau à des essais expérimentaux précédés de nouvelles simulations. Les cartes de champ en résultant pour une fréquence d'excitation de 22 Hz et les diagrammes de transmission numériques et expérimentaux sont présentés sur la Figure 2.14. Nous observons bien une forte réduction de la transmission pour des fréquences correspondant à la bande interdite visible en Figure 2.13, avec un accord satisfaisant entre les résultats obtenus numériquement et expérimentalement.

## 2.4/ CONCEPTION D'UN CRISTAL PRÉSENTANT UN COMPORTEMENT TOPOLOGIQUE

La conception d'un cristal présentant une bande interdite pour les ondes de surface dans l'eau étant un succès, notre objectif est maintenant de l'utiliser afin de concevoir un cristal avec un comportement topologique. La première étape est alors la vérification de la conservation du comportement du cristal même en changeant le signe de l'angle de rotation des inclusions, et l'étude des modes formant les bandes de transmission encadrant la bande interdite.

### 2.4.1/ INFLUENCE DE L'ORIENTATION DES PILIERS DU CRISTAL

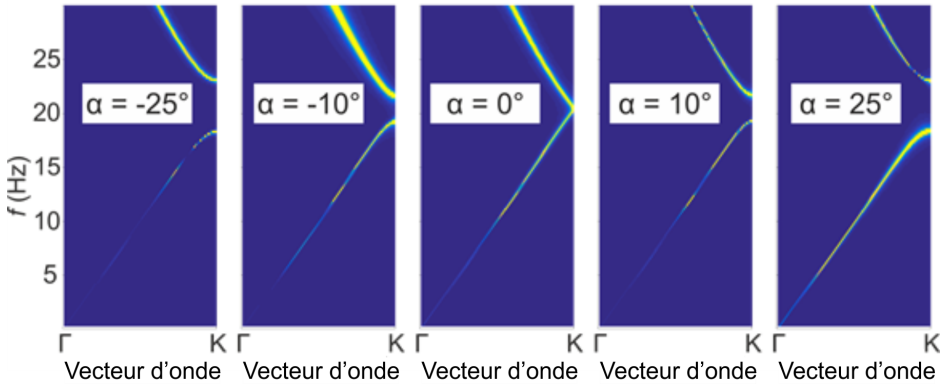



FIGURE 2.15 – Évolution théorique du diagramme de dispersion suivant la direction ΓK en fonction de l'orientation des piliers du cristal.

La Figure 2.15 nous permet de constater la symétrie du comportement du cristal pour une orientation des piliers centrée sur $\alpha = 0°$. Dès lors, il est possible de comparer le comportement des ondes de Bloch au sein du cristal au point K de la zone de Brillouin pour les deux bandes encadrant la bande interdite, que nous désignerons par les états K1 et K2 par la suite comme illustré sur la Figure 2.16.

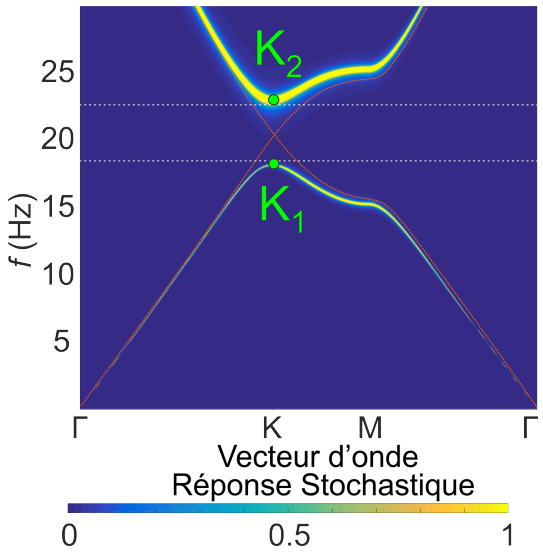



FIGURE 2.16 – Position des points K1 et K2. Les lignes pointillées rouges représentent la structure de bande du cristal pour une orientation des piliers de 0°. Les pointillés blancs indiquent les fréquences limites de la bande interdite.

Le groupe d'espace bidimensionnel du cristal est illustré sur la Figure 2.17 pour différentes valeurs de l'angle de rotation $\alpha$. Celui-ci vaut $p31m$ pour $\alpha = 0°$, ce qui signifie la présence de trois axes de rotation triple, et de trois plans de symétrie qui correspondent à deux contours et une diagonale de la cellule unitaire. Lorsque $0° < |\alpha| < 30°$,

ces symétries sont réduites à celles d'un groupe d'espace bidimensionnel $p3$, c'est à dire seulement trois axes de rotation triple. Finalement, pour $|\alpha| = 30°$ le groupe d'espace bidimensionnel de notre cristal est $p3m1$, où l'on retrouve les centres de rotation triple précédents, et trois plans de symétrie différents de ceux obtenus avec le groupe d'espace $p31m$. Ces changements de groupe d'espace expliquent l'existence d'une transition topologique quand le paramètre $\alpha$ passe continument par 0°.

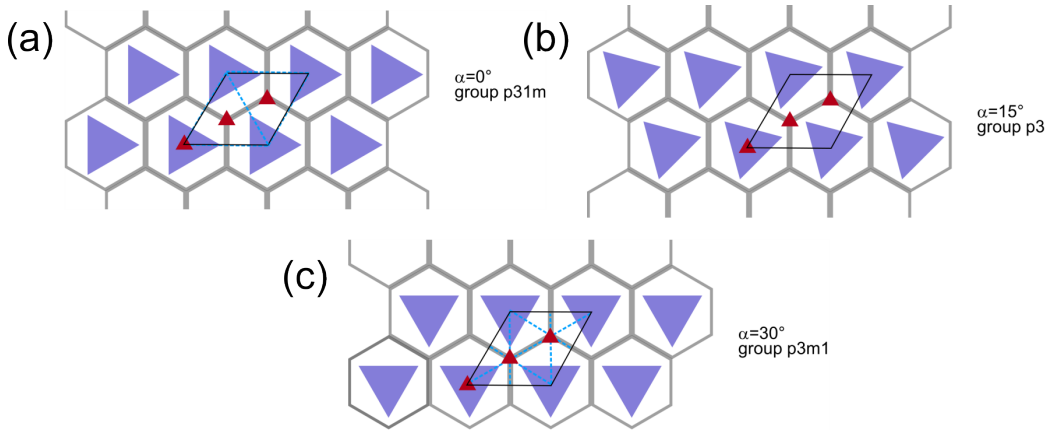



FIGURE 2.17 – Groupe d'espace bidimensionnel pour des cristaux avec différentes valeurs de $\alpha$. Les centres des rotations triples sont indiqués par des triangles rouges, et les axes de symétrie par des lignes pointillées. Pour $\alpha = 0°$, le cristal a bien trois axes de rotation triple et trois plans de symétrie (a), pour $0° < |\alpha| < 30°$ le cristal ne conserve que les trois axes de rotation triple (b) et pour $|\alpha| = 30°$ le cristal a toujours ses trois axes de rotation triple, mais retrouve trois nouveaux plans de symétrie (c).

Sur la Figure 2.18, nous représentons les ondes de Bloch correspondant au états K1 et K2, c'est à dire la première et la seconde bande du diagramme de bandes au point K de la première zone de Brillouin pour $\alpha = 30°$. Nous remarquons que les ondes de Bloch K1 présentent une symétrie $p3$, composée principalement de trois vortex centrés sur la zone où les sommets des triangles sont les plus proches. Nous relevons que le sens de rotation de ces vortex est opposé lorsque le signe de $\alpha$ est changé. Ils tournent dans le sens horaire pour $\alpha$ positif, et dans le sens trigonométrique pour $\alpha$ négatif. Les ondes de Bloch K1 pour $\pm\alpha$ sont les images d'une réflexion glissée d'axe $Ox$ et d'une translation d'un demi paramètre de maille, elles sont aussi l'image d'une rotation glissée pivotée de $2\pi/3$ et $4\pi/3$.

En ce qui concerne les ondes de Bloch K2, elles présentent aussi une symétrie $p3$, composée de trois vortex centrés cette fois sur la zone où les coins des triangles sont les plus proches. Le sens de rotation de ces vortex est aussi opposé lorsque le signe de $\alpha$ est changé, et est l'inverse du sens de rotation des vortex K1. Comme dans le cas des ondes de Bloch K1, les ondes de Bloch K2 pour $\pm\alpha$ sont les images d'une réflexion glissée d'axe $Ox$ et d'une translation d'un demi paramètre de maille, elles sont aussi l'image d'une rotation glissée pivotée de $2\pi/3$ et $4\pi/3$.

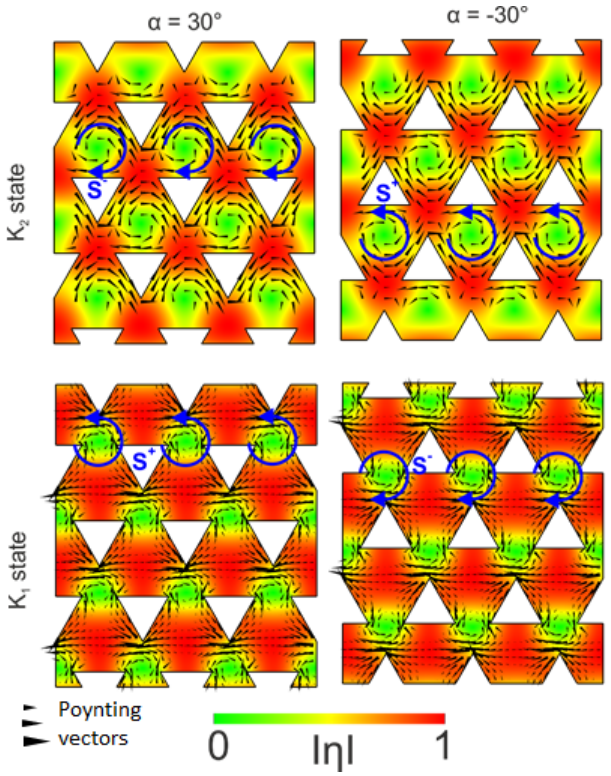



FIGURE 2.18 – Représentation des vortex d'ondes de Bloch dans un cristal au point K de la première zone de Brillouin. L'échelle de couleur correspond à la valeur absolue de l'élévation de l'eau (normalisée), et les flèches à la distribution du vecteur de Poynting. Les vortex d'ondes de Bloch sont représentés pour des piliers orientés à $\alpha = 30°$ et $\alpha = -30°$.

### 2.4.2/ ÉTUDE D'INTERFACES COMPOSÉES DE CRISTAUX À BANDE INTERDITE

Les cristaux que nous utiliserons par la suite consistent en un assemblage d'un cristal que nous désignerons comme "Bleu" (B), dont les inclusions ont une orientation $\alpha = 30°$, et un cristal que nous désignerons comme "Rouge" (R) dont les inclusions ont une orientation $\alpha = -30°$. Le cristal R est l'image d'une réflexion glissante suivant l'axe $Ox$ et d'une translation de $a/2$ du cristal B. Cette propriété peut être exploitée pour concevoir une interface séparant les deux cristaux chiraux non-équivalents B et R. Deux types d'interfaces sont possibles dans ce cas, celle que nous désignerons comme de type B-R avec le cristal B sur le cristal R, et inversement pour le type R-B. Ces deux interfaces présentent une symétrie de groupe de frise de type $p11g$, comme présenté sur la Figure 2.19.

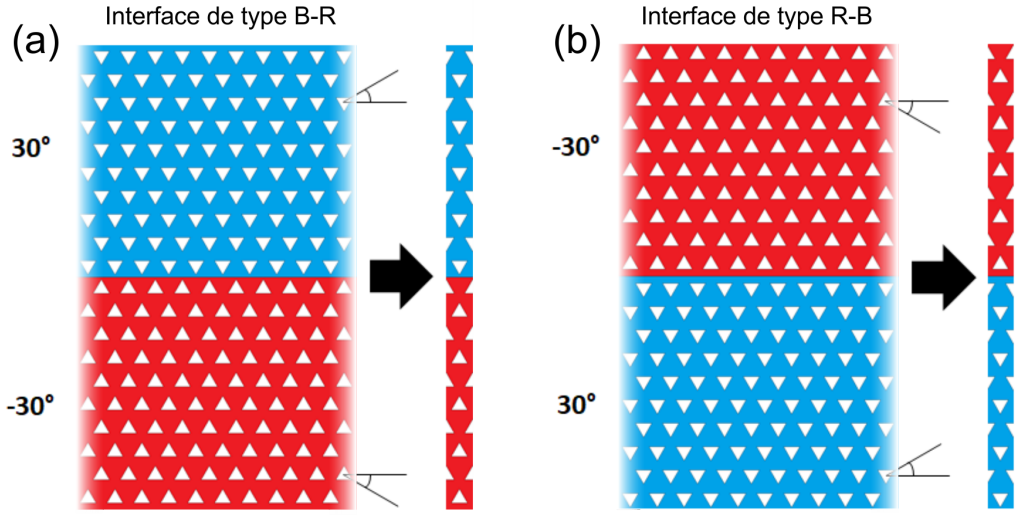



FIGURE 2.19 – (a) Interface de type Bleu-Rouge (B-R). (b) Interface de type Rouge-Bleu (R-B). Sont représentées à leur droite les cellules unitaires correspondantes.

Nous procédons ensuite au calcul des structures de bandes des cristaux ainsi obtenus à partir des cellules unitaires correspondantes en appliquant des conditions de périodicité le long des bords perpendiculaires à l'interface, et des conditions de bords de Dirichlet le long des autres, dont les résultats sont visibles sur la Figure 2.20.

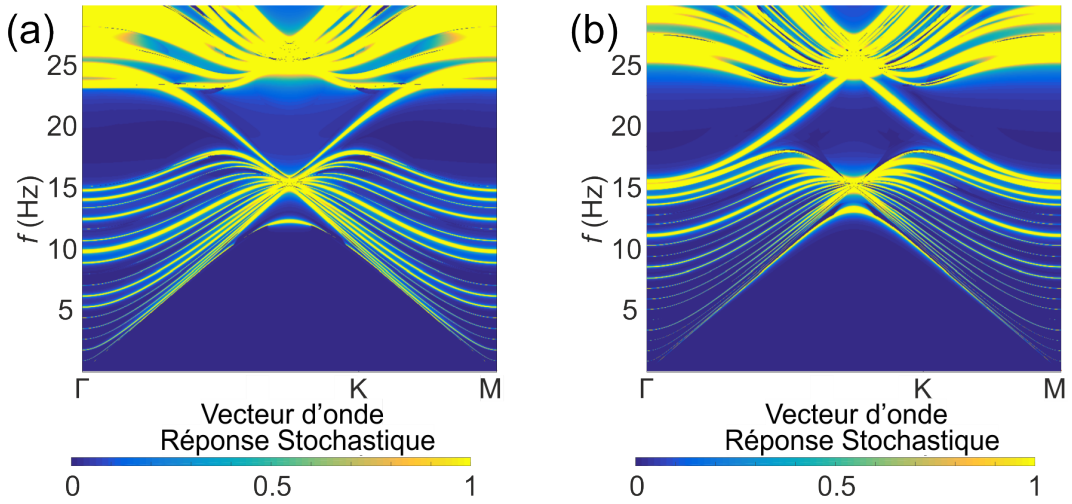



FIGURE 2.20 – (a) Diagramme de dispersion d'un cristal de type Bleu-Rouge (B-R). (b) Diagramme de dispersion d'un cristal de type Rouge-Bleu (R-B).

Il apparaît que pour les deux types d'interface, un mode se propage dans le cristal à des fréquences comprises dans la bande interdite. Dès lors, il est intéressant d'observer le comportement des cristaux pour ces fréquences, en particulier les cartes de champ correspondantes. Nous simulons donc le comportement de ces cristaux à de telles fréquences.

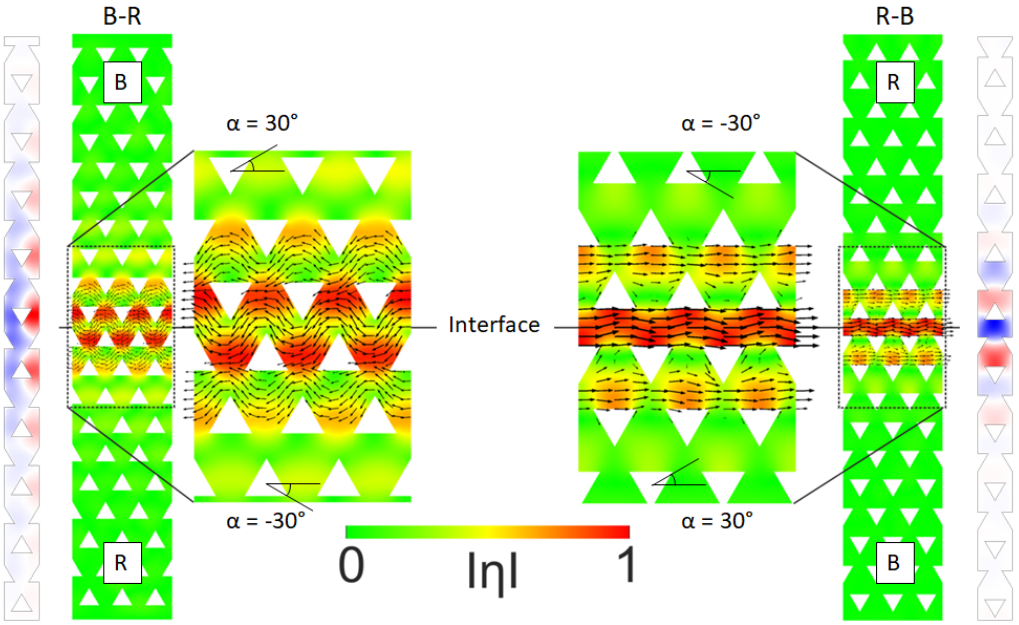



FIGURE 2.21 – Visualisation des modes propres des interfaces pour une onde se propageant de gauche à droite. L'échelle de couleur correspond à la valeur absolue de l'élévation de l'eau normalisée. Les flèches représentent la distribution du vecteur de Poynting. Les incrustations à droite et à gauche indiquent la phase des modes correspondants.

Il apparaît alors que des modes de bord se forment à l'interface entre les cristaux B et R, et ce pour les deux types d'interfaces, comme cela a déjà été montré dans le cas de milieux non dispersifs [86]. Nous pouvons noter le caractère évanescent de ces modes : leur amplitude décroit exponentiellement au fur et à mesure que l'éloignement par rapport à l'interface augmente.

Les vortex d'ondes de Bloch K1 et K2 visibles sur la Figure 2.18 se situent à la limite de la bande interdite et ne sont donc pas évanescents. Étant donné que le problème aux valeurs propres analytique est fonction du nombre d'onde $k$, nous supposons que les ondes évanescentes de Bloch peuvent être déformées de manière continue depuis les ondes de Bloch K1 et K2. Puisque les ondes de bord sont nécessairement composées de telles ondes de Bloch évanescentes du cristal, qui se rencontrent à l'interface, la formation de ces ondes de bord peut être comprise comme une superposition de vortex d'ondes de Bloch. Nous concluons des cartes de champ de la Figure 2.21 que le mode de bord de l'interface B-R est composé d'ondes de Bloch évanescentes K1 et que le mode de bord de l'interface R-B est composé d'ondes de Bloch évanescentes K2. De plus, la direction du vecteur de Poynting montre que le mode à l'interface B-R a une dispersion négative, c'est à dire qu'il se propage avec une vitesse de groupe et une vitesse de phase de signes opposés, ou formulé autrement, sa vitesse de groupe est négative pour des nombres d'ondes positifs, contrairement au mode de l'interface R-B qui a une

dispersion positive.

La question que nous nous posons maintenant est de savoir s'il existe une possibilité de coupler ces modes avec une onde incidente plane, ce qui peut être vérifié en comparant leurs champs modaux au moyen d'une intégrale de recouvrement de formule :

$$\Psi = \frac{|\int_{\partial\Omega} \eta_0 \cdot \eta(x,y)dy|}{\int_{\partial\Omega} |\eta(x,y)|dy}, \tag{2.13}$$

avec $\partial\Omega$ l'interface entre le cristal et le domaine extérieur. Elle peut être calculée pour toutes les ondes de Bloch des super-cellules, de manière similaire à l'obtention des structures de bandes visibles sur la Figure 2.20. Le nombre en résultant, compris entre 0 et 1, mesure le couplage entre le mode de bord et une onde plane d'amplitude $\eta_0 = 1$ le long de l'interface $\partial\Omega$. Un résultat proche de 1 indique un fort couplage, et un résultat proche de 0, une absence de couplage.

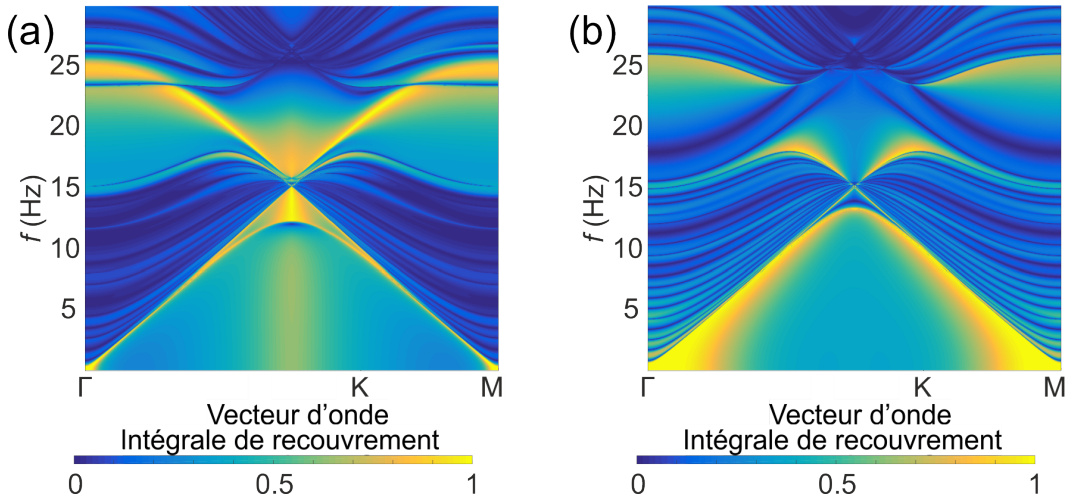



FIGURE 2.22 – (a) Intégrale de recouvrement d'un cristal de type Bleu-Rouge (B-R). (b) Intégrale de recouvrement d'un cristal de type Rouge-Bleu (R-B).

Les résultats présentés sur la Figure 2.22 indiquent que l'on trouve numériquement $\Psi_{B-R} \approx 1$ pour l'interface B-R et $\Psi_{R-B} \approx 0,03$ pour l'interface R-B. Ainsi, seule l'interface de type B-R doit être en mesure de propager un mode de bord lorsque lorsqu'une onde plane est envoyée sur le cristal. Nous allons donc chercher à vérifier cette supposition expérimentalement.

### 2.4.3/ CARACTÉRISATION EXPÉRIMENTALE

Le cristal qui sera utilisé expérimentalement par la suite se divise en trois zones, de manière à présenter une interface B-R et une interface R-B. Cette configuration nous

permet d'observer le comportement des deux interfaces à une même sollicitation, en l'occurrence, une onde plane.

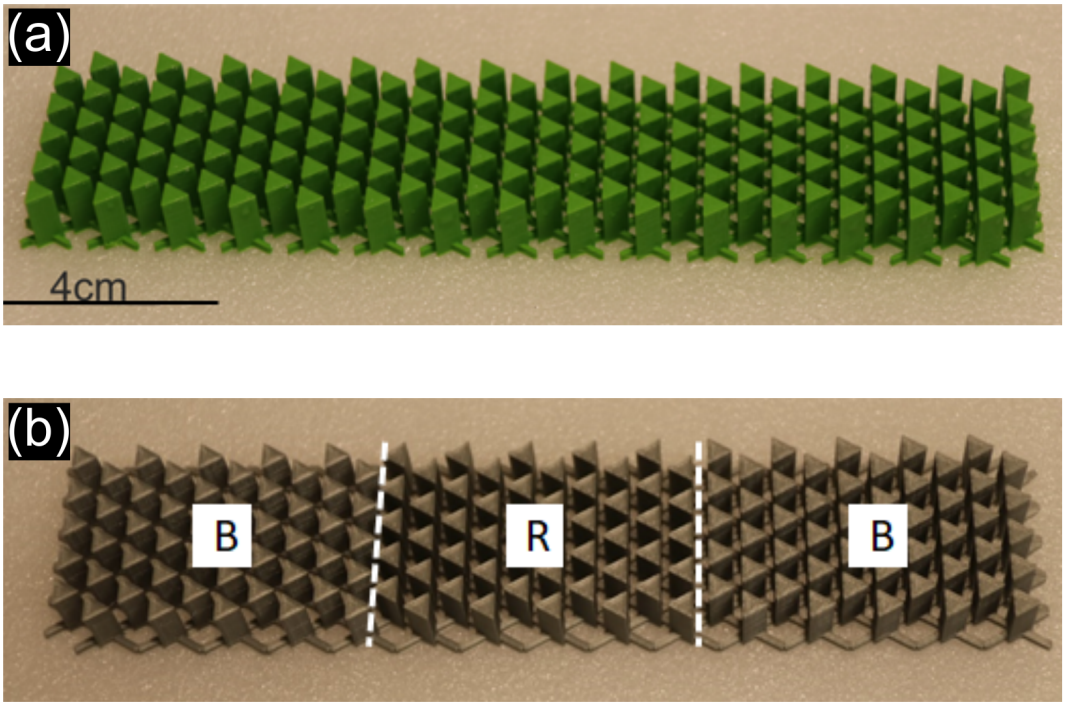



FIGURE 2.23 – Comparaison entre un cristal à bande interdite complète (a) et un cristal topologique (b). Aperçu des différentes zones du cristal topologique, ainsi que des interfaces qu'il présente.

Nous calculons la structure de bandes de ce cristal afin de vérifier si la proximité des interfaces ne provoque pas l'apparition d'un nouveau comportement, en appliquant cette fois uniquement des conditions de périodicité sur les frontières du cristal. Nous en profitons également pour calculer l'intégrale de recouvrement correspondante. La Figure 2.24 présente les résultats obtenus.

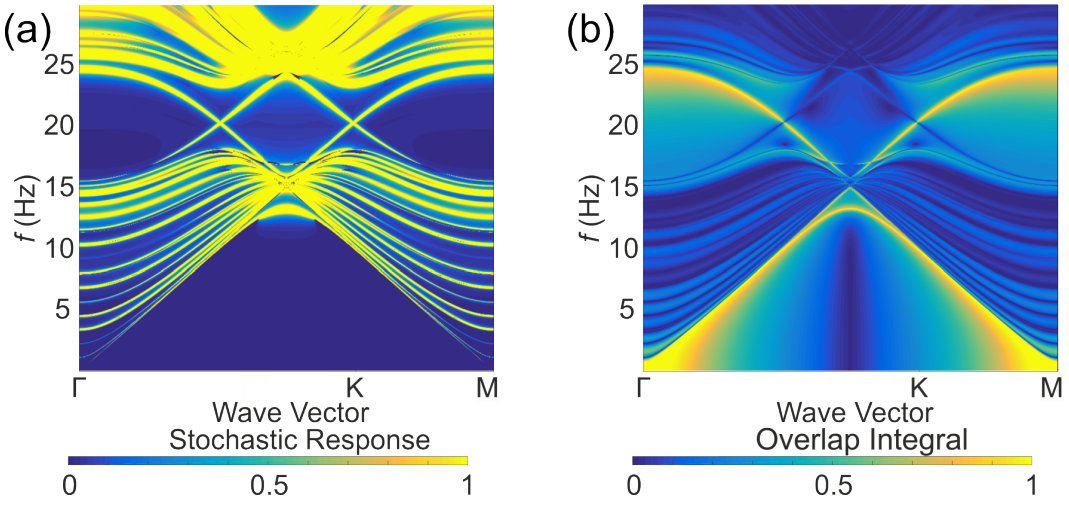


FIGURE 2.24 – (a) Diagramme de dispersion du cristal expérimental. (b) Intégrale de recouvrement du cristal expérimental.

Il apparaît sur la Figure 2.24 que l'on retrouve bien les comportements des deux interfaces dans notre cristal, et que ceux-ci ne sont pas modifiés. Nous réalisons donc des essais avec ce cristal pour toutes les fréquences comprises entre 15 Hz et 30 Hz.

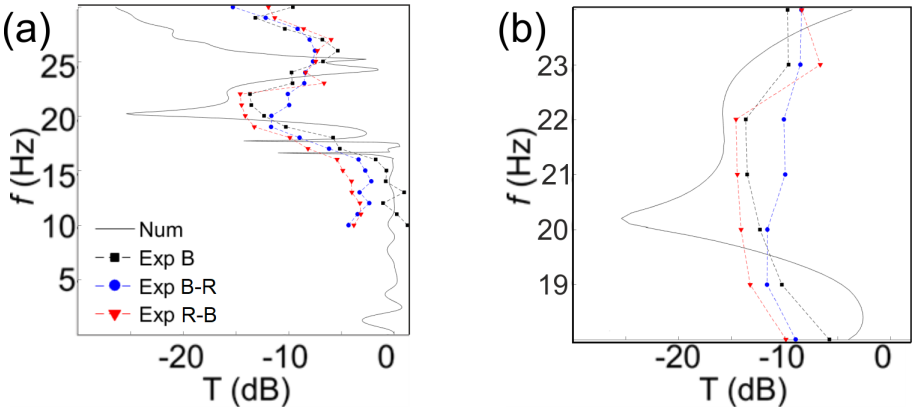



FIGURE 2.25 – (a) Comparaison quantitative de la transmission pour l'interface B-R et l'interface R-B, comparée au cas numérique d'un cristal à bande interdite complète. (b) Visualisation de ces résultats pour les fréquences correspondant à la bande interdite.

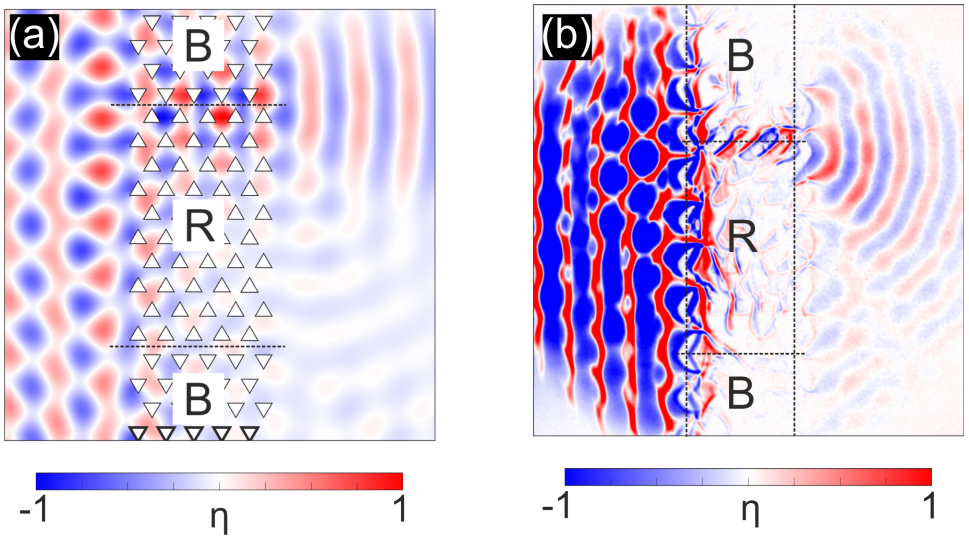



FIGURE 2.26 – (a) Carte de champ numérique du cristal expérimental pour une fréquence d'excitation de 22 Hz. (b) Carte de champ obtenue expérimentalement à la même fréquence.

Les résultats expérimentaux présentés en Figures 2.25 et 2.26 permettent de confirmer l'hypothèse énoncée précédemment stipulant que seule l'interface B-R doit permettre de canaliser une onde incidente plane à travers le cristal.

## 2.5/ CONCLUSION

Pour conclure, lors de ces premiers travaux, nous avons réalisé la démonstration expérimentale de l'existence de modes de bords topologiques guidés le long d'une interface d'un cristal pour les ondes de surface dans l'eau, dans le régime intermédiaire des ondes de gravité-capillarité. Ces modes de bords résultent de la superposition d'ondes de vortex transportant une phase topologique quantifiée [79]. Une correspondance qualitative satisfaisante entre la théorie et l'expérience est obtenue, notamment grâce à l'utilisation de paramètres effectifs pour modéliser le comportement des effets de capillarité à l'interface entre l'eau et le cristal. Ces paramètres seraient cependant dispensables dans le cadre d'une expérience utilisant un cristal dont les dimensions par rapport à la longueur d'onde capillaire seraient plus grandes.

# 3

# CRISTAL TOPOLOGIQUE SÉPARATEUR D'ONDE DE GRAVITÉ-CAPILLARITÉ

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la conception et à l'analyse d'un séparateur d'ondes topologique. Ce travail a été réalisé en coopération avec une équipe de l'Imperial College of London, qui s'est penchée sur la conception de ce cristal tandis que nous avons mis en œuvre une procédure expérimentale permettant de vérifier leurs résultats théoriques. Ce chapitre s'articulera autour d'une première partie décrivant le raisonnement menant à la configuration du cristal étudié [98], puis l'étude théorique complémentaire que nous avons menée, ainsi que nos résultats expérimentaux [105].

## 3.1/ CONCEPTION DU CRISTAL

### 3.1.1/ ENJEUX

Le développement de la compréhension des phénomènes permettant le contrôle, la manipulation et le guidage des ondes, en particulier dans les domaines de l'acoustique et de l'optique, a rendu possible la conception de nombreux dispositifs. L'un des plus utilisés est le séparateur de faisceaux, permettant de séparer un faisceau de lumière en deux, qui a de nombreuses applications dans les expériences étudiant les phénomènes quantiques, ou encore en astrophysique. Cette volonté de guider des ondes, de les séparer et de les rediriger, pour une large gamme de fréquences, avec le moins de pertes possible et de manière robuste, ne se limite pas aux domaines de l'optique et de l'électromagnétisme, et s'est depuis étendu à d'autres domaines de la physique. À cet égard, les isolants topologiques ont amené de tels dispositifs à être davantage robustes que les configurations précédentes. Cependant, la grande majorité des séparateurs d'ondes topologiques reposent sur la géométrie du graphène, c'est à dire une structure hexagonale, ce qui restreint la séparation d'une onde incidente en deux ondes guidées. Le but de la géométrie développée dans cette partie doit permettre la séparation d'une onde incidente dans trois

directions. Un tel dispositif pourrait prendre la forme de quatre interfaces connectées en un point. Intuitivement, ce raisonnement amène à penser qu'une géométrie basée sur des cellules carrées ou des cellules rectangulaires pourrait remplir cet office.

### 3.1.2/ STRUCTURE CELLULAIRE C2V

La première géométrie étudiée consiste en un assemblage de cellules carrées contenant une inclusion triangulaire. Dans l'espace réel, cette géométrie ne présente qu'une symétrie suivant l'axe $Oy$ dite "verticale", mais dans l'espace réciproque, du fait de la symétrie par renversement du temps, cette géométrie présente à la fois une symétrie suivant l'axe $Oy$ et une symétrie suivant l'axe $Ox$ dite "horizontale", tel qu'illustré sur la Figure 3.1. En effet, un groupe ponctuel de symétrie est défini comme l'ensemble des opérateurs de symétrie $\hat{R} \in G_\Gamma$ qui vérifient $\hat{R}\kappa = \kappa$ mod **G** où **G** est un vecteur de base du réseau réciproque. Cela implique que pour $\kappa \in$ NX, seul l'opérateur de symétrie horizontale $\sigma_h$ vérifie les conditions du groupe ponctuel de symétrie. De même, pour $\kappa \in \Gamma$N, seul l'opérateur de symétrie verticale, $\sigma_v \in C_{2v}$, satisfait le critère du groupe ponctuel de symétrie.

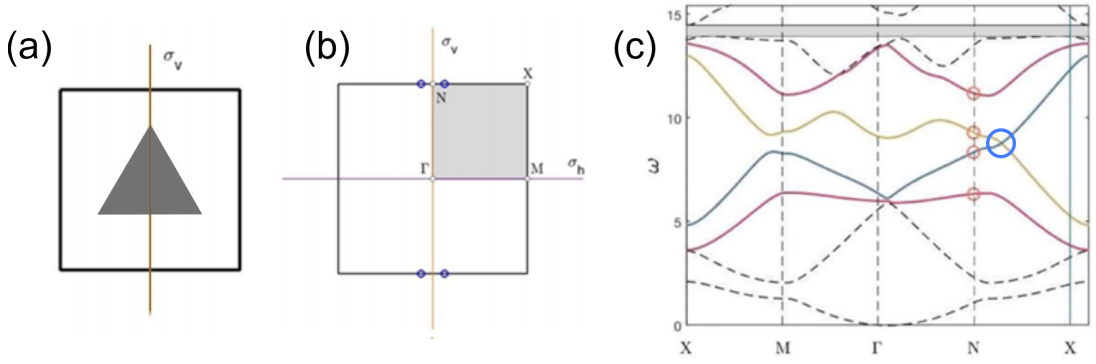



FIGURE 3.1 – D'après [98]. (a) Schéma de la cellule unitaire considérée. (b) Première zone de Brillouin associée à la cellule unitaire. La zone de Brillouin irréductible apparait grisée et les cercles visibles indiquent la localisation des cônes de Dirac visibles sur le diagramme de dispersion associé à la cellule unitaire (c).

Le diagramme de dispersion de cette structure présente un cone de Dirac le long du chemin NX, qui s'il venait à s'ouvrir formerait une bande interdite, comme présenté dans le chapitre précédent. Une manière d'ouvrir ce cone de Dirac est de briser la symétrie verticale de la cellule unitaire, en particulier en faisant pivoter l'inclusion. Ce faisant, la symétrie verticale est brisée dans l'espace réel, de même que dans l'espace réciproque.

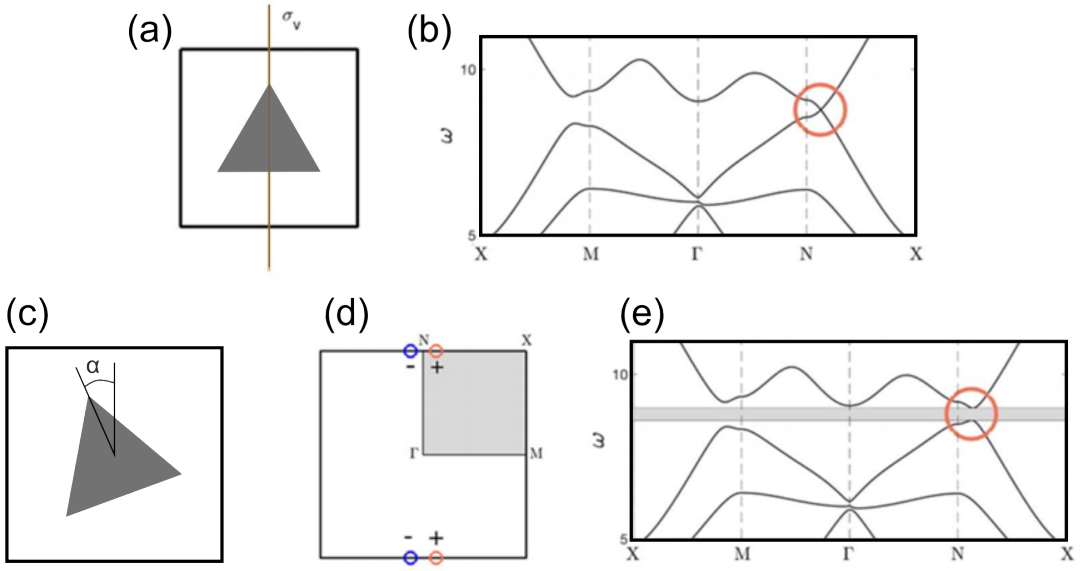



FIGURE 3.2 – D'après [98]. Influence de la rotation de l'inclusion. (a) Schéma d'une cellule unitaire carrée comprenant une inclusion triangulaire n'ayant pas subi de rotation. (b) Diagramme de dispersion associé à cette cellule unitaire. (c) Schéma d'une cellule unitaire dont l'inclusion a subi une rotation 20°. (d) Première zone de Brillouin associée à la cellule unitaire constituée d'une maille carrée et d'une inclusion triangulaire ayant subi une rotation. Sont indiqués les signes des nombres de Chern calculés suite à l'ouverture des cônes de Dirac visibles sur la Figure 3.1. (e) Diagramme de dispersion associé à cette cellule unitaire.

En changeant le signe de l'angle de rotation de l'inclusion, il est possible d'obtenir deux cristaux présentant une même bande interdite. Lors de l'ouverture des cônes de Dirac, il est possible de calculer le nombre de Chern $C_\nu$ associé à la vallée ainsi ouverte [32, 52, 76, 94]. Dans le cadre de notre étude, nous ne nous intéresserons qu'au signe de ce nombre, comme cela est visible sur la Figure 3.2. En effet, il a été démontré [98] que pour qu'un mode d'interface puisse se propager d'une manière similaire à ce que nous avons observé dans le chapitre 2 de ce manuscrit, il faut que la projection des nombres de Chern sur l'axe de la première zone de Brillouin correspondant à la direction de propagation attendue (c'est à dire le chemin $\Gamma$M pour une propagation horizontale, et $\Gamma$N pour une propagation verticale), fasse intervenir des nombres $C_\nu$ de même signe.

Or nous pouvons constater que la projection des nombres de Chern calculés pour cette première structure sur le chemin $\Gamma$M font intervenir des nombres de Chern de même signe, contrairement à la projection suivant $\Gamma$N. Les interfaces obtenues à partir de ces cristaux permettent donc la propagation de modes d'interfaces dans la direction horizontale, mais pas dans une direction verticale.

### 3.1.3/ STRUCTURE CELLULAIRE C4V

La nouvelle géométrie étudiée reprend la forme carrée de la cellule unitaire, mais fait cette fois intervenir une inclusion carrée, comme illustré sur la Figure 3.3. La cellule ainsi obtenue présente une symétrie verticale et aussi une symétrie horizontale. À noter que deux symétries diagonales peuvent aussi être observées, mais nous ne nous y intéresserons pas pour le moment. La conséquence de cette nouvelle géométrie sur le diagramme de dispersion est l'apparition d'un second cône de Dirac le long du chemin MX, identique à celui visible sur le chemin NX, en raison de la nouvelle symétrie horizontale de la cellule. Ainsi, la rotation de l'inclusion brise toutes les symétries de la cellule et provoque l'ouverture des deux cônes de Dirac et l'ouverture d'une bande interdite complète.

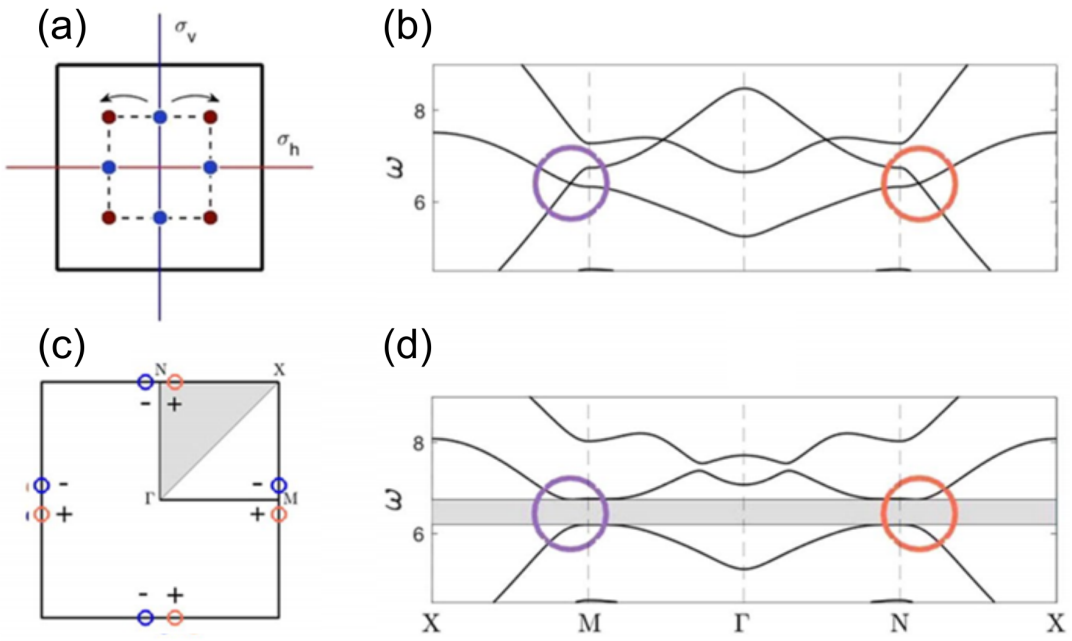



FIGURE 3.3 – D'après [98]. (a) Schéma de la cellule unitaire considérée. (b) Diagramme de dispersion associé à cette cellule. (c) Première zone de Brillouin d'une cellule dont l'inclusion a subi une rotation. Sont indiqués les signes des nombres de Chern calculés suite à l'ouverture des cônes de Dirac visibles en (b). (d) Diagramme de dispersion associé à la cellule dont l'inclusion a subi une rotation.

Encore une fois, le changement du signe de l'angle de rotation conduit à une bande interdite identique. Les deux interfaces construites à partir de ces cristaux doivent permettre la propagation de deux modes de propagation différents, visibles sur la Figure 3.4. Cependant, il est important de remarquer que ces structures sont équivalentes, dans le sens où une onde se propageant de gauche à droite le long de la première interface est la même qu'une onde se propageant de droite à gauche le long de la seconde interface, et inversement. Cette propriété n'existe pas dans le cas de cristaux faisant intervenir des inclusions triangulaires, que la maille soit carrée ou hexagonale. Il existe donc deux modes

de propagation pour ces interfaces, qui coexistent au sein de la bande interdite.

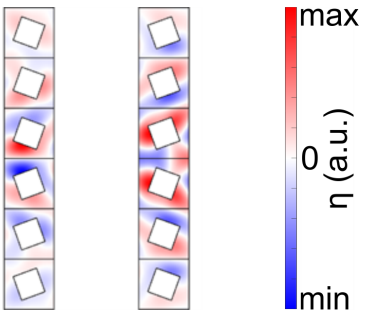



FIGURE 3.4 – Aperçu des deux interfaces pouvant être construites à partir du dernier cristal, ainsi que les modes de propagation qui y sont associés obtenus en considérant un cristal infini suivant l'axe y et périodique suivant l'axe x.

Enfin, il apparaît sur la Figure 3.3 que la projection des nombres de Chern sur les chemins ΓM et ΓN impliquent dans les deux cas des nombres de Chern de même signe. Cette géométrie doit donc permettre la propagation de modes d'interfaces dans des directions horizontales et verticales.

### 3.1.4/ DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL

Il a été montré dans le chapitre précédent que les ondes à la surface de l'eau pouvaient présenter un comportement topologique, nous souhaitons donc exploiter cette propriété dans nos prochains travaux. Dès lors, il est tentant de réutiliser notre précédent dispositif expérimental. Cependant, nous avons conclu à la fin du chapitre précédent de la nécessité de réduire l'influence des effets de capillarité sur le comportement des ondes au sein des cristaux étudiés. Ces effets sont liés à la longueur d'onde capillaire, qui pour rappel vaut $l_c = 1,7$ cm, une séparation entre les obstacles d'au moins 4 cm doit permettre de pouvoir négliger ces effets de capillarité. De plus, nous souhaitons pouvoir étudier un cristal pouvant être composé de 10x10 cellules, tout en laissant un espace suffisant autour pour laisser une surface d'eau libre, ainsi qu'un dispositif agissant comme une PML. Cependant, les résultats obtenus par l'équipe de l'Imperial College of London indiquent que les effets que nous souhaitons étudier nécessitent une inclusion dont les dimensions sont deux fois plus petites que celles de la cellule unitaire. Une séparation de 4 cm entre les inclusions nécessite donc l'utilisation d'un cristal dont les cellules unitaires mesurent 8 cm de côté, ce qui impliquerait l'utilisation d'un cristal d'au moins 80x80 $cm^2$. Il peut être judicieux d'étudier dans un premier temps un cristal dont la séparation entre les obstacles est de 2 cm, distance qui doit alors permettre de réduire sensiblement les effets de capillarité.

Ces conditions interdisent l'utilisation du dispositif expérimental utilisé précédemment en raison de sa taille. En effet, d'après les conditions énoncées plus haut, le cristal étudié

aura des dimensions d'au moins 40x40 $cm^2$, dimensions auxquelles nous ajoutons un intervalle de 10 cm entre les bords du cristal et la PML, qui doit permettre d'observer le comportement des ondes au sein de notre cristal avant que d'éventuelles ondes réfléchies ne viennent perturber la mesure. Comme PML, nous utiliserons des blocs de polystyrène inclinés, selon le principe utilisé sur notre premier dispositif. Nous utilisons donc un bac de dimensions 80x80 $cm^2$, avec des pans de polystyrène inclinés à 45° de 10 cm de largeur ce qui nous laisse une surface d'étude de 60x60 $cm^2$.

Dans un premier temps, nous songeons à utiliser un dispositif reprenant le principe de fonctionnement de la cuve à ondes, à savoir un bac à fond transparent, au dessus duquel est installée une source lumineuse, et sous lequel est disposé un miroir incliné à 45° permettant de réfléchir l'image de la surface de l'eau sur un écran qui est ensuite filmé par une caméra placée devant. Cependant, reproduire une cuve à ondes de cette taille posait plusieurs problématiques, dont la première était la question de l'illumination du bac à ondes. En effet, afin d'imager correctement le cristal étudié, il est nécessaire que la source lumineuse éclaire uniformément chaque zone du cristal, afin d'éviter que des ombres trop grandes ne se forment, comme ce serait le cas avec une source lumineuse ponctuelle. Ensuite, imager la surface de l'eau dans une cuve à ondes nécessitant de mesurer des variations de luminosité, celle-ci doit être contrôlée et nécessite donc de réaliser nos expériences dans un local dédié. Celui à notre disposition ne disposait pas de l'espace nécessaire à l'installation de la caméra devant imager l'écran du dispositif.

Dès lors, il devenait nécessaire de songer à un autre dispositif d'imagerie. Nous avons alors songé à utiliser un dispositif de corrélation d'images, inspiré du dispositif utilisé par Moisy et al. [39]. Le fond du bac à ondes étant transparent, il est possible d'installer en dessous de celui-ci un motif composé de points noirs de diamètre $d = 0,5$ mm répartis aléatoirement sur un fond blanc. Les perturbations à la surface de l'eau modifient la perception de leur position. Avec une caméra placée à la verticale de notre cristal, il devient possible d'imager le comportement des ondes en son sein. Ceci permet de circonvenir à la problématique de l'espace. En ce qui concerne la question de la source lumineuse, il n'est plus nécessaire d'éclairer uniformément le cristal, une source indirecte doit permettre d'obtenir une illumination suffisante pour permettre à la caméra de distinguer les points du motif sous le bac à ondes, comme illustré sur la Figure 3.5.

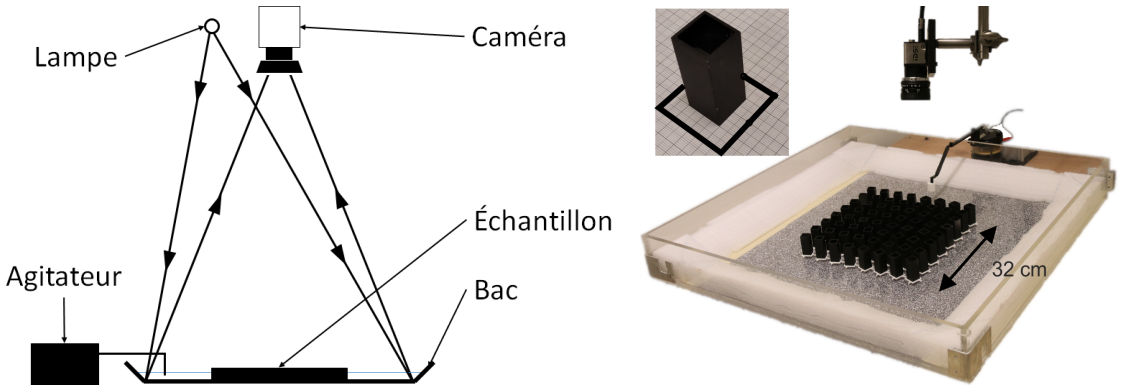



FIGURE 3.5 – Schéma et photo du dispositif expérimental.

Enfin, si sur notre précédent dispositif la source lumineuse était synchronisé avec l'agitateur mécanique, notre nouveau montage expérimental ne permet plus une telle opération, c'est pourquoi nous avons opté pour une source lumineuse continue, qui nous permet d'éclairer correctement le cristal étudié quelle que soit la fréquence d'étude. L'agitateur mécanique utilisé peut recevoir une extrémité plane ou cylindrique, en fonction de l'opération que nous souhaitons réaliser. Le signal qui le commande est un signal carré généré par un générateur de basses fréquences.

Lors des premières expériences réalisées, nous avons constaté que la source lumineuse que nous utilisions, à savoir une plaque recouverte de LEDs en ruban, ne permettait pas d'obtenir un éclairage suffisamment diffus pour imager correctement notre cristal. Nous avons donc ajouté une lampe supplémentaire, qui présente cependant l'inconvénient d'être branchée sur le secteur, ce qui a pour conséquence l'apparition d'un effet stroboscopique sur les images acquises par la caméra si la fréquence d'acquisition de celle-ci n'est pas un multiple de 50 Hz. Nous choisissons donc de réaliser nos acquisitions à une fréquence de 100 Hz. Malgré le fait que cela puisse paraître être une contrainte, nous verrons par la suite pourquoi ce n'est en réalité pas le cas.

Pour finir, les cristaux étudiés sont composés d'un assemblage de tubes d'aluminium de section carrée de 2 cm de côté, et ont un paramètre de maille qui vaut 4 cm. Ces tubes sont recouverts d'une couche de peinture noir mat pour éviter les réflexions qui viendraient perturber nos mesures. Nous filmons ensuite le comportement des ondes au passage de ces cristaux, puis la corrélation d'images est réalisée au moyen du logiciel DPIVSoft. Ce logiciel compare deux images successives et en déduit plusieurs paramètres, parmi lesquels l'élévation de la surface, tel que présenté sur la Figure 3.6.

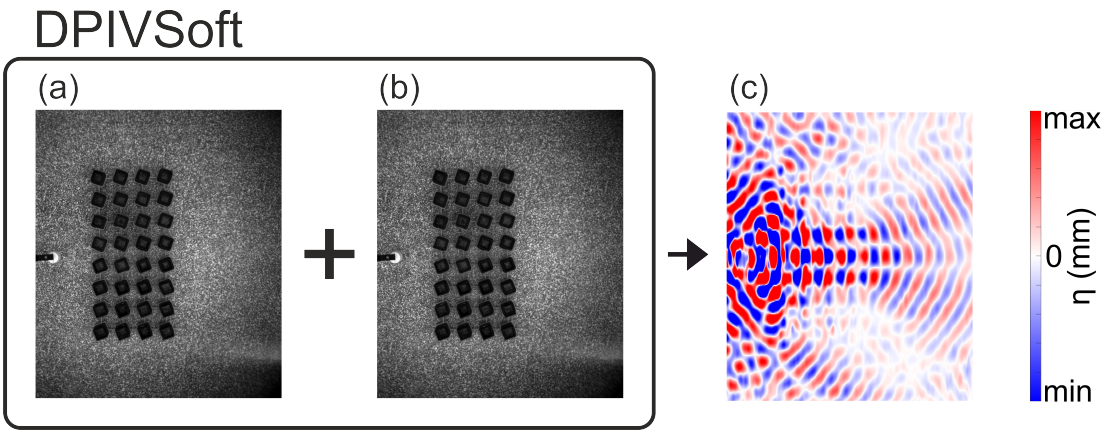



FIGURE 3.6 – Principe de la corrélation d'image. Deux images successives (a) et (b) sont implémentées dans le logiciel, qui après analyse permet de connaitre l'élévation de l'eau (c) sur la première image (a).

Les différents cristaux étudiés sont obtenus en plaçant les tubes d'aluminium dans des supports réalisés au moyen d'une imprimante 3D. Ce dernier assure l'alignement des différentes inclusions du cristal afin de réduire autant que possible les différents effets dûs au décalage d'un tube par rapport à un autre.

### 3.1.5/ COMPORTEMENT DE L'EAU DANS LES CONDITIONS EXPÉRIMENTALES

Le système que nous étudions à présent fait toujours intervenir des ondes de gravité-capillarité. En reprenant le raisonnement développé dans le chapitre précédent, nous pouvons dire que les équations le décrivant sont la méthode de séparation des variables

$$\Phi(x,y,z,t) = Re\left[\phi(x,y)\cosh(\kappa(z+h))\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\right], \tag{3.1}$$

l'équation de Helmholtz

$$\nabla\cdot\left(c_p c_g \nabla\eta\right) + \kappa^2 c_p c_g \eta = 0, \tag{3.2}$$

ainsi que la relation de dispersion

$$\omega^2 = g\kappa\left(1 + d_c^2\kappa^2\right)\tanh(\kappa h). \tag{3.3}$$

Le changement d'échelle du cristal ayant été rendu nécessaire pour réduire l'influence des effets de capillarité, nous débutons notre étude en supposant qu'il n'est pas nécessaire d'introduire des paramètres effectifs pour rendre compte du comportement des ondes au sein du cristal.

Nous souhaitons cependant comparer la propagation d'ondes de surfaces circulaires numériquement et expérimentalement, en prenant comme paramètres une tension de surface à l'interface eau-air de $\gamma = 0,0735$ N·m$^{-1}$ et une hauteur d'eau de $h = 4$ cm, pour

une fréquence d'excitation de 7 Hz. Les résultats obtenus sont présentés sur la Figure 3.7.

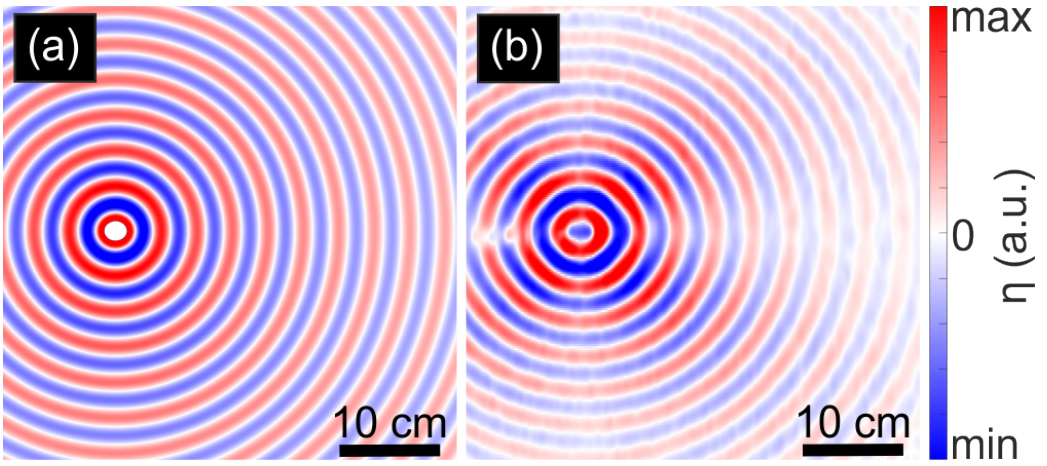



FIGURE 3.7 – (a) Propagation numérique et (b) expérimentale d'ondes circulaires à la surface de l'eau à partir d'une source ponctuelle.

À partir de ces images, nous pouvons déduire la longueur d'onde mesurée numériquement et expérimentalement. Numériquement, nous obtenons une longueur d'onde égale à $\lambda = 3,3$ cm, et expérimentalement $\lambda = 3,5$ cm, soit un écart de seulement 6 %. Nous en concluons que la corrélation entre les simulations numériques et les expérimentations est probante et qu'il est possible d'anticiper le comportement des ondes de gravité-capillarité au sein d'un cristal au moyen de simulations numériques.

## 3.2/ CONCEPTION D'UN CRISTAL PRÉSENTANT UNE BANDE INTERDITE

Nous reprenons la démarche suivie dans le chapitre précédent, à savoir la conception d'un cristal présentant une bande interdite complète. Les recherches et les résultats obtenus par l'équipe de l'Imperial College of London nous indiquent quels doivent être les relations entre les différents paramètres géométriques, et que leurs résultats sont indépendants du système physique étudié.

### 3.2.1/ GÉOMÉTRIE DU CRISTAL ÉTUDIÉ

Dans la section 3.1, nous avons vu que la géométrie du cristal que nous allons étudier est composée de cellules unitaires carrées contenant chacune une inclusion carrée. Nous avons aussi vu quelle devait être la relation liant les dimensions des cellules unitaires et celles des inclusions, à savoir $a = 2 \cdot b$. Nous avons aussi posé comme hypothèse

que les obstacles devaient être séparés d'au moins 2 cm. Compte tenu de la condition sur les dimensions des inclusions, il apparaît que cet écart correspond aussi aux dimensions des inclusions. En conséquence, les dimensions finales du cristal étudié sont celles présentées sur la Figure 3.8.

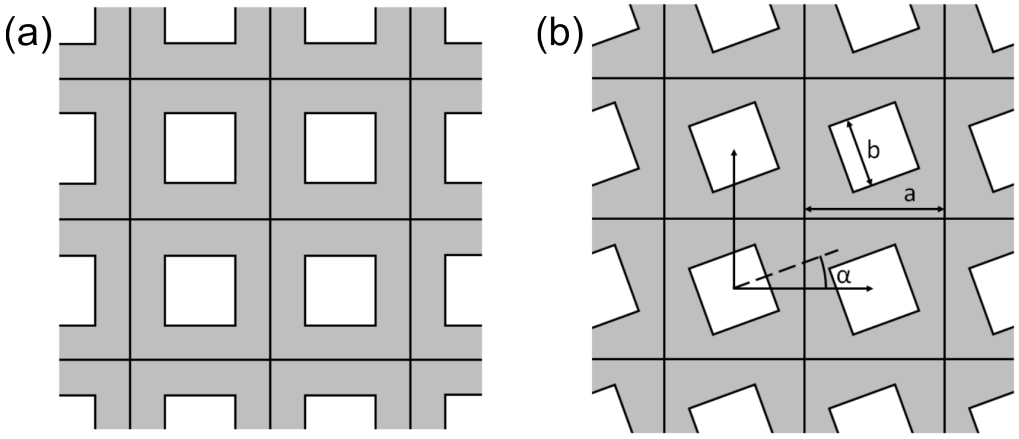



FIGURE 3.8 – (a) Géométrie initiale du cristal étudié. (b) Paramètres finaux du cristal utilisé : $a = 4$ cm, $b = 2$ cm, $\alpha = 20°$.

Le choix d'un angle $\alpha = 20°$ a été fait par l'équipe de l'Imperial College of London, nous partons donc du principe que cette valeur correspond à sa valeur optimale, c'est à dire que c'est pour cet ensemble de paramètres qu'est obtenue la bande interdite la plus large, et nous ne chercherons pas à vérifier cet aspect, de même que la relation entre $a$ et $b$.

### 3.2.2/ RELATION DE DISPERSION

Étant donné que le système que nous étudions présente toujours une dépendance des coefficients de l'équation de Helmholtz à la fréquence d'excitation, nous reprenons la méthode proposée par Laude et Korotyaeva [93] pour obtenir la structure de bande du cristal étudié.

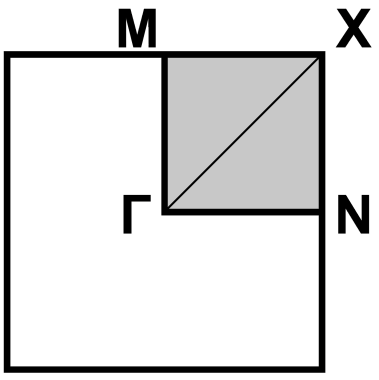


FIGURE 3.9 – Aperçu de la zone de Brillouin correspondant au cristal.

Afin de constater l'ouverture ou non du fait de la rotation des inclusions au sein du cristal, nous calculons les diagrammes de bandes correspondant à des rotations de $\alpha = 0°$ et $\alpha = 20°$. Les paramètres du milieu que nous prenons pour calculer les diagrammes de dispersion présentés sur la Figure 3.10 sont $\gamma = 0,0735$ N·m$^{-1}$ pour la tension de surface et $h = 4$ cm pour la hauteur d'eau.

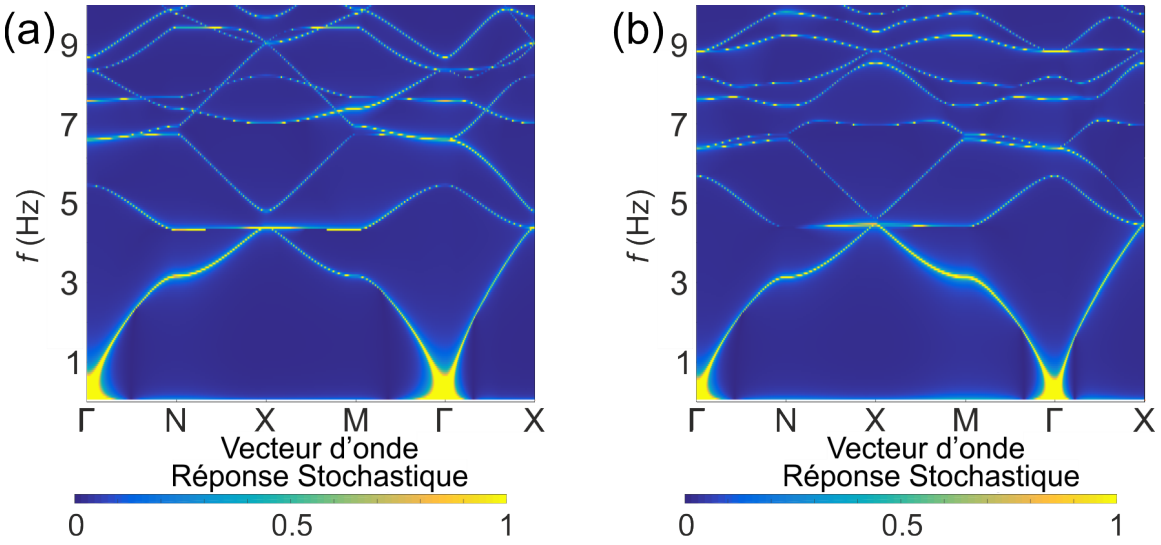



FIGURE 3.10 – (a) Diagramme de dispersion effectif du cristal pour une orientation des inclusions de $0°$ (b) et pour une orientation des inclusions de $20°$.

Le premier diagramme de dispersion obtenu met en évidence l'existence de trois cônes de Dirac le long des chemins NX, MX et ΓX pour une fréquence d'excitation proche de 7 Hz dans le cas où les inclusions sont orientées à $\alpha = 0°$. Lorsque les inclusions subissent une rotation de $\alpha = 20°$, la brisure des symétries de la cellule provoque l'ouverture de ces cônes de Dirac et l'ouverture d'une bande interdite complète pour des fréquences comprises entre 7 Hz et 7,4 Hz.

### 3.2.3/ SIMULATION DE LA TRANSMISSION D'UN CRISTAL À BANDE INTERDITE

Afin de confirmer l'apparition d'une bande interdite complète, nous procédons à un calcul de la transmission d'un train d'ondes au passage de deux cristaux composés d'inclusions orientées de $\alpha = 20°$. Le premier est composé de deux rangées de 8 inclusions, et le second de quatre rangées de 8 inclusions. La comparaison des transmissions de ces deux cristaux doit permettre de constater l'influence de l'épaisseur d'un tel cristal phononique.

Pour effectuer ces calculs, nous considérons un train d'ondes planes dont la source est placée à 10 cm du bord du cristal. L'avantage d'utiliser une source d'ondes planes est

que les calculs en sont simplifiés par rapport à une source d'ondes cylindriques, mais cela a comme inconvénient de ne permettre l'identification que de bandes interdites directionnelles. Cependant, il apparaît au vu des résultats présentés sur la Figure 3.10 que la bande interdite complète est contenue dans une bande interdite directionnelle suivant la direction ΓN.

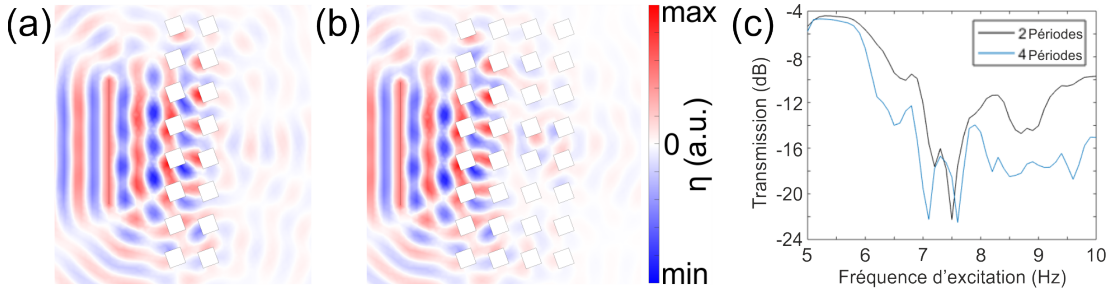



FIGURE 3.11 – (a) Carte de champ pour un cristal à 2 rangées. (b) Carte de champ pour un cristal à 4 rangées. Les deux simulations sont effectuées avec une fréquence d'excitation de 7,2 Hz. (c) Diagramme de transmission des deux cristaux.

Le diagramme de transmission présenté sur la Figure 3.11, réalisé en considérant une tension de surface de $\gamma = 0,0735$ N·m$^{-1}$ et une hauteur d'eau de $h = 4$ cm, indique une baisse marquée de la transmission des cristaux pour des fréquences de sollicitations comprises entre 6,8 Hz et 7,7 Hz, ce qui d'après la Figure 3.10 correspond à une bande interdite directionnelle suivant la direction ΓN. Cette baisse est d'autant plus marquée que le nombre de rangées d'inclusions augmente.

### 3.2.4/ VÉRIFICATION EXPÉRIMENTALE DE LA TRANSMISSION D'UN CRISTAL À BANDE INTERDITE

Nous souhaitons maintenant vérifier expérimentalement ces résultats numériques. Nous reproduisons donc ces cristaux dans notre dispositif. La hauteur d'eau est ici aussi de 4 cm, et nous reprenons comme source d'ondes planes l'agitateur et le balai plan utilisés dans le chapitre précédent. Les résultats obtenus sont présentés sur la Figure 3.12.

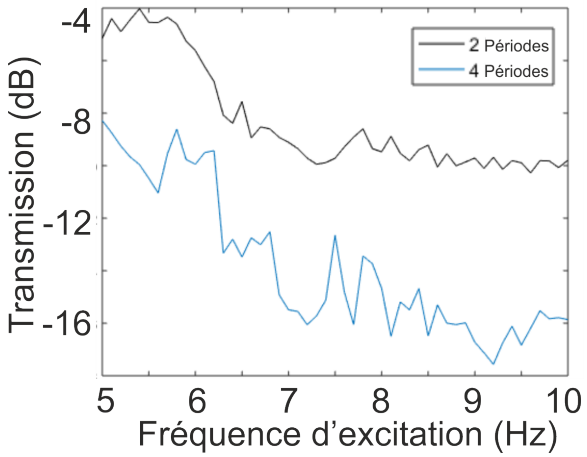



FIGURE 3.12 – Diagramme de transmission de deux cristaux de 2 ou 4 cellules de largeur en fonction de la fréquence suivant la direction de propagation ΓN.

Nous constatons expérimentalement une baisse de la transmission des cristaux étudiés pour des fréquences d'excitation comprises entre 6,9 Hz et 7,4 Hz. Cette gamme de fréquence étant incluse dans celle obtenue numériquement, nous pouvons en déduire que les résultats numériques et expérimentaux sont en accord. Le fait que la baisse de transmission ne soit pas aussi bien marquée pour un cristal composé de deux rangées d'inclusions nous contraint cependant à utiliser des cristaux composés d'au moins quatre rangées d'inclusions.

Un autre élément qui peut être déduit des résultats présentés sur la Figure 3.12 est que le fait d'augmenter le nombre de rangées dans le cristal provoque une baisse de transmission pour l'ensemble des fréquences étudiées beaucoup plus marquée que dans les simulations numériques. L'interprétation que nous en faisons est que bien que les dimensions du cristal aient été augmentées par rapport à celui étudié dans le chapitre précédent, nous ne sommes pas parvenu à annuler l'influence de la capillarité. Cela se traduit par une atténuation de l'amplitude des ondes au passage du cristal.

## 3.3/ CONCEPTION D'UN CRISTAL PRÉSENTANT UN COMPORTEMENT TOPOLOGIQUE

La possibilité d'obtenir une bande interdite pour un tel cristal dans le cas d'ondes de gravité-capillarité ayant été démontré, nous nous intéressons maintenant à la vérification de l'existence d'un comportement topologique au sein de ce cristal.

### 3.3.1/ DESIGN DES INTERFACES

Le cristal que nous étudierons par la suite consiste à nouveau en un assemblage d'un cristal que nous désignerons comme "Bleu" (B), dont les inclusions ont une orientation $\alpha = -20°$ et un cristal désigné comme "Rouge" (R) dont les inclusions ont une orientation $\alpha = 20°$. Les deux cristaux pouvant être obtenus sont présentés sur la Figure 3.13. Ils sont considérés comme infinis suivant l'axe y et périodiques suivant l'axe x.

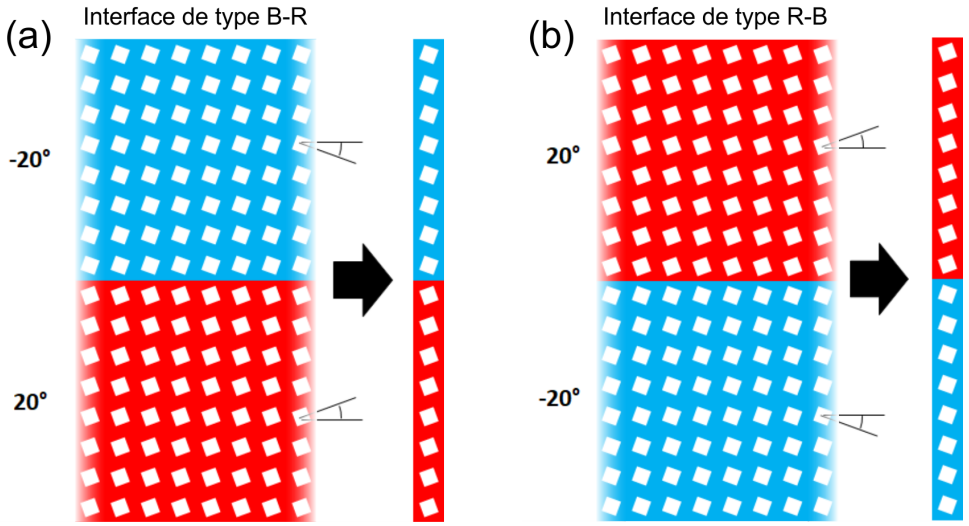



FIGURE 3.13 – Définition des interfaces pouvant être obtenues à partir des cristaux étudiés. (a) Interface de type Bleu-Rouge (B-R). (b) Interface de type Rouge-Bleu (R-B). Sont représentées à leur droite les cellules unitaires correspondantes.

Comme expliqué dans la section 3.1.3, ces deux cristaux sont équivalents. Cela nous permet de restreindre notre étude à un seul de ces deux cristaux, c'est pourquoi par la suite nous ne considérerons plus que le cristal B-R, que ce soit dans le cadre des travaux numériques ou expérimentaux.

Nous procédons donc au calcul de la structure de bandes de ce cristal à partir de sa cellule unitaire, en appliquant des conditions de périodicité le long des bords perpendiculaires à l'interface, et des conditions de bords de Dirichlet le long des autres. Nous utilisons toujours la méthode développée par Laude et Korotyaeva [93]. Les résultats obtenus sont présentés sur la Figure 3.14.

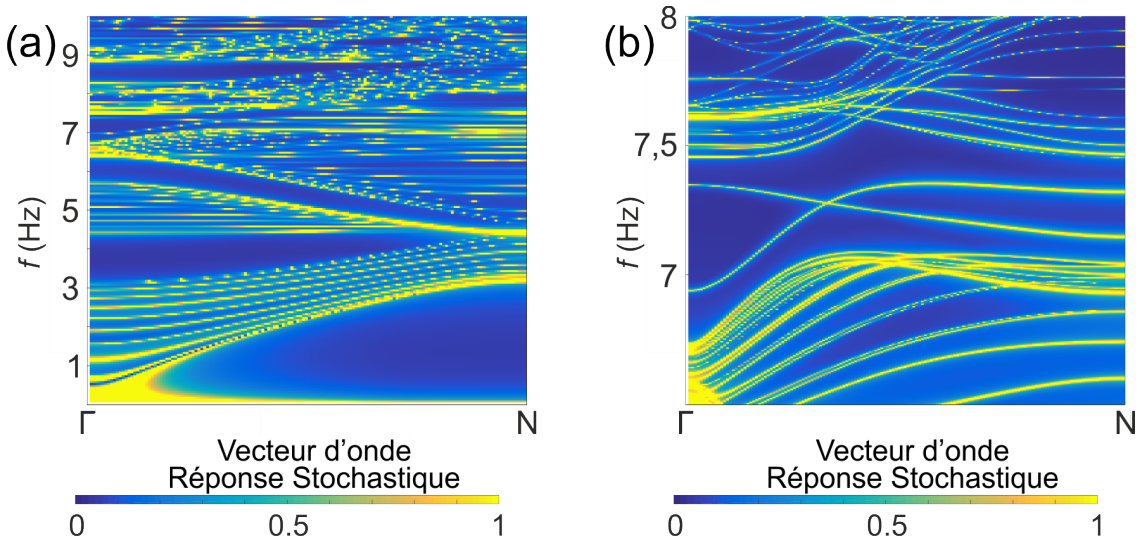



FIGURE 3.14 – (a) Diagramme de dispersion de l'interface de type B-R. (b) Zoom sur la gamme de fréquence correspondant à la bande interdite.

Comme prévu, il apparaît que deux modes coexistent au sein de la bande interdite et se propagent le long de cette interface. La phase de ces modes est représentée sur la Figure 3.15. Du fait de l'intersection des bandes les représentant, nous pouvons en déduire la possibilité d'excitation simultanée ces deux modes, comme cela devrait se produire à l'intersection de deux interfaces.

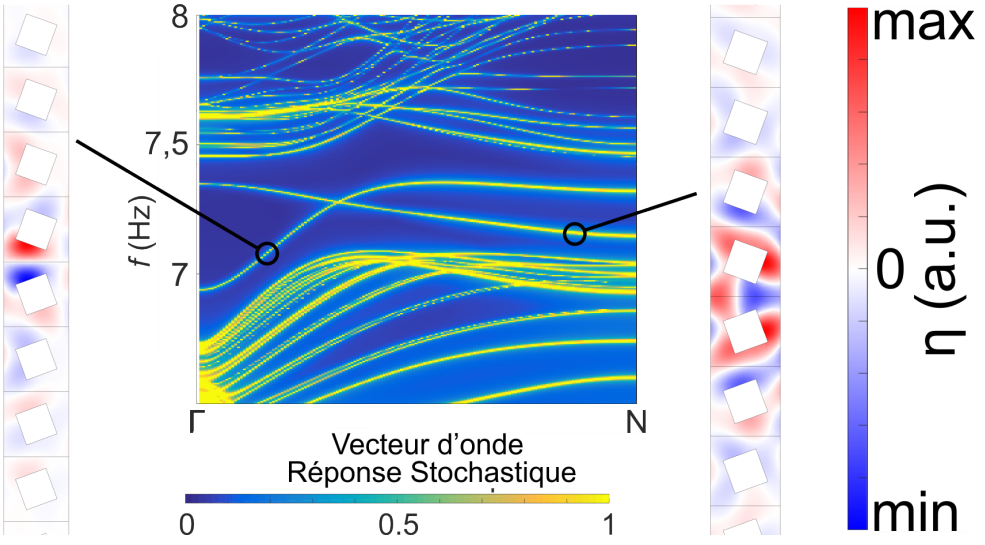



FIGURE 3.15 – Carte de champ des modes propres se propageant le long de l'interface du cristal B-R. Nous retrouvons bien un mode symétrique et un mode anti-symétrique, comme montré sur la Figure 3.4.

### 3.3.2/ ÉTUDE DE LA TRANSMISSION D'UN CRISTAL AVEC UNE INTERFACE

Nous cherchons maintenant à observer ces modes de bords expérimentalement. Pour ce faire, nous procédons dans un premier temps à l'assemblage des cristaux que nous allons étudier selon la configuration B-R. Le premier est composé de 4x8 inclusions et le second de 8x8 inclusions, tel que présenté sur la Figure 3.16. Nous sollicitons ensuite ces cristaux avec une onde circulaire dont la fréquence d'excitation se situe dans la bande interdite mise en évidence précédemment, à savoir 7,3 Hz.

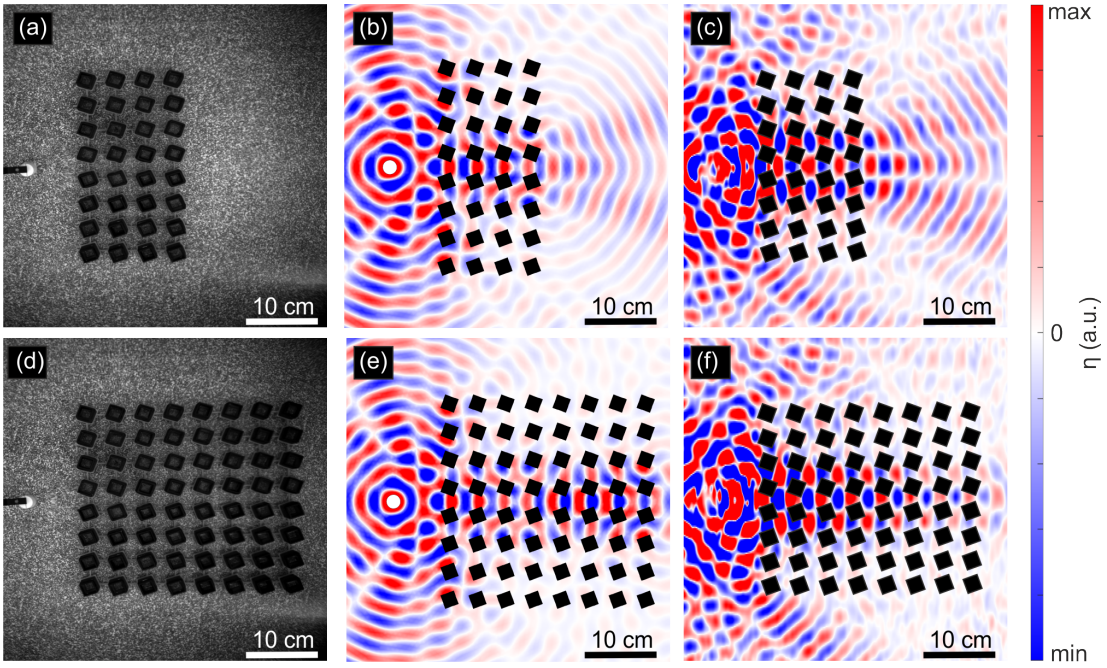



FIGURE 3.16 – Mise en évidence de modes de bords de Valley-Hall numériquement et expérimentalement. Le code couleur correspond à la variation du niveau d'eau. (a,d) Aperçu en vue de dessus du dispositif expérimental avec des cristaux composés de respectivement 4x8 et 8x8 inclusions carrées. (b,e) Cartes de champs obtenues numériquement pour une fréquence d'excitation de 7,3 Hz. La source consiste en un cylindre placé à 6 cm à gauche des cristaux. (c,f) Observation expérimentale du profil des ondes à la surface de l'eau pour une fréquence d'excitation de 7,3 Hz.

En comparant ces résultats expérimentaux aux simulations numériques, nous constatons un bon accord entre la théorie et l'expérience en dépit du fait que les effets de capillarité à l'interface entre l'eau et les piliers n'aient pas été modélisés. La localisation et le confinement des modes de bords apparaît clairement. Un autre point observé expérimentalement qui est présent dans les résultats numériques est le rayonnement des ondes au delà du cristal 4x8.

L'étape suivante est la mise en évidence de la gamme de fréquence pour laquelle ce comportement est observé. Nous reprenons donc les précédents cristaux et les soumettons à des fréquences d'excitations comprises entre 6,5 Hz et 8 Hz. Les résultats observés

sont présentés sur la Figure 3.17 et la Figure 3.18.

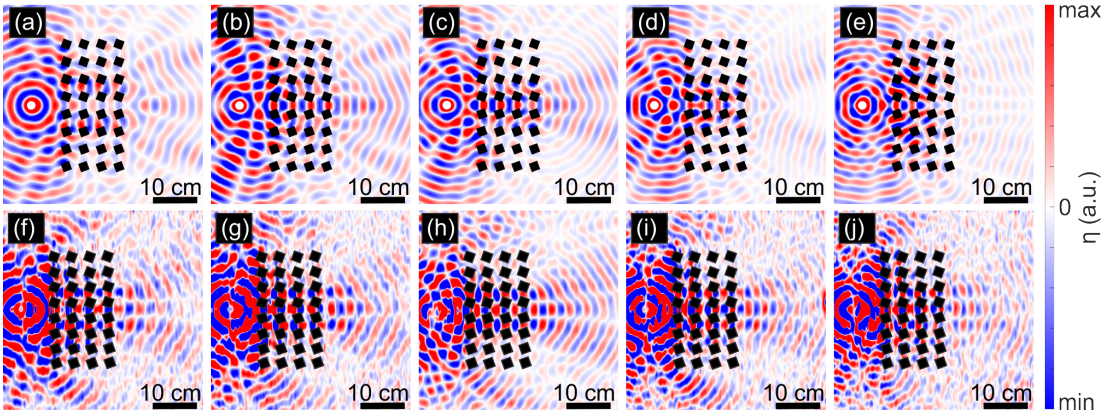



FIGURE 3.17 – Modes de bord de Valley-Hall avec une interface de quatre cellules de long. Résultats numériques (haut) et expérimentaux (bas) pour des fréquences de 6,7 Hz (a,f), 7 Hz (b,g), 7,3 Hz (c,h), 7,6 Hz (d,i) et 7,9 Hz (e,j).

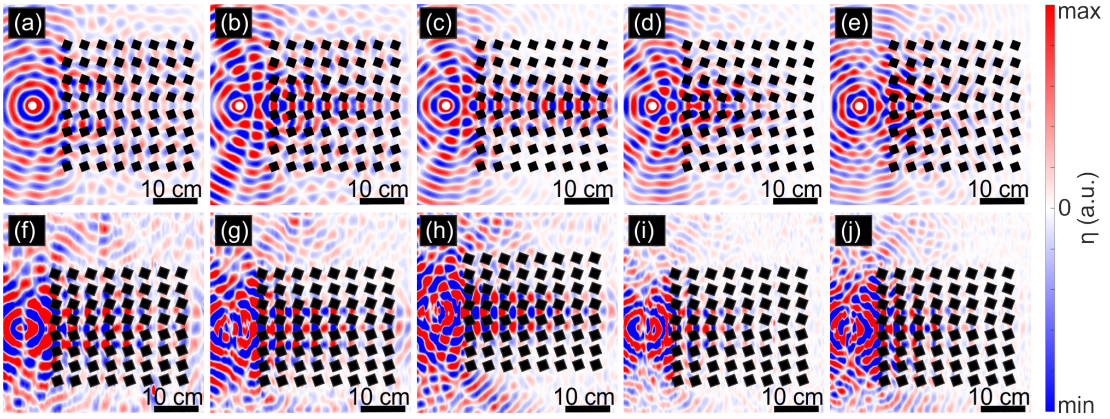



FIGURE 3.18 – Modes de bord de Valley-Hall avec une interface de huit cellules de long. Résultats numériques (haut) et expérimentaux (bas) pour des fréquences de 6,7 Hz (a,f), 7 Hz (b,g), 7,3 Hz (c,h), 7,6 Hz (d,i) et 7,9 Hz (e,j).

À l'issue de ces expérimentations, il apparaît que les modes de bord se propagent pour des fréquences d'excitation comprises entre 7 Hz et 7,6 Hz. L'ensemble de ces résultats permet de valider la possibilité de confiner et de guider des ondes fortement dispersives, à savoir des ondes de gravité-capillarité, dans un cristal présentant une maille carrée.

## 3.4/ CONCEPTION D'UN CRISTAL SÉPARATEUR D'ONDES

Nous revoyons à présent la configuration de notre cristal afin de le séparer en quatre quadrants permettant la séparation d'une onde incidente dans trois directions. La configuration retenue est visible sur la Figure 3.19.

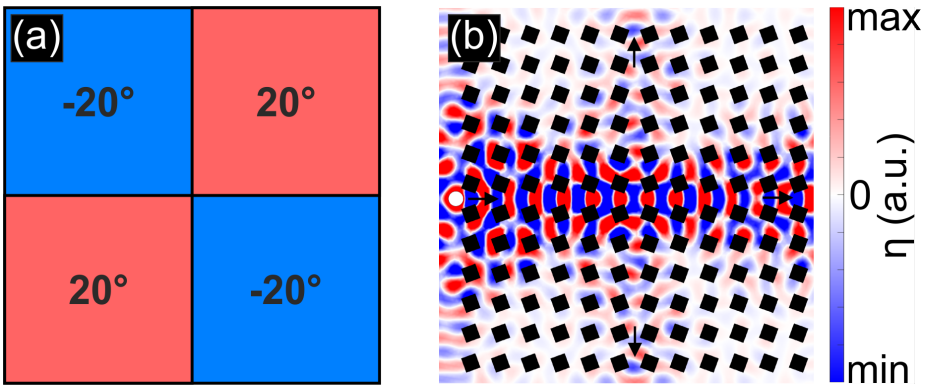



FIGURE 3.19 – (a) Architecture du cristal séparateur d'onde reprenant le code couleur précédent. (b) Carte de champ obtenue numériquement pour ce cristal en reprenant la source cylindrique pour une fréquence d'excitation de 7,3 Hz.

Les simulations numériques indiquent l'apparition de modes en haut et en bas du cristal, ce qui n'est pas possible pour des cristaux présentant une maille hexagonale. Cela est dû au fait que la chiralité des interfaces doit être la même pour l'interface de gauche et l'interface de droite, ce qui est le cas pour les cristaux à maille carrée, du fait de leur symétrie, mais pas pour les cristaux à maille hexagonale. Une fois ces résultats obtenus, nous procédons à une vérification expérimentale de ce comportement.

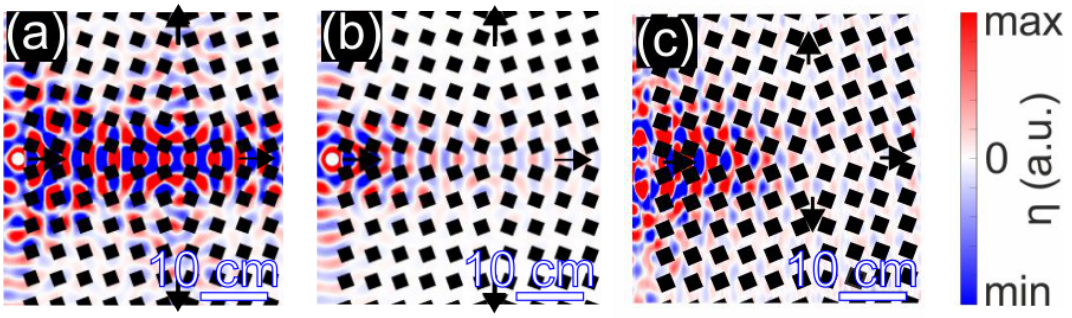



FIGURE 3.20 – (a) Carte de champ obtenue numériquement sans pertes. (b) Carte de champ obtenue numériquement incorporant une atténuation représentée par une vitesse de phase complexe dont la partie imaginaire correspond à 0,02 fois la partie réelle. (c) Carte de champ obtenue expérimentalement.

La Figure 3.20 présente la carte de champ obtenue expérimentalement pour ce cristal à une fréquence d'excitation de 7,3 Hz. Nous constatons une forte atténuation de l'amplitude du mode de bord à l'intersection des différentes interfaces, ce qui n'est reproduit numériquement qu'en introduisant une partie imaginaire à la vitesse de phase des ondes simulant des pertes dues aux effets de capillarité. Cela conduit à des résultats expérimentaux peu concluants.

## 3.5/ CONCLUSION

Nous avons montré expérimentalement la possibilité de guider des ondes de gravité-capillarité dans l'eau au moyen de la topologie dans une structure non-hexagonale. Nous avons aussi simulé la possibilité de concevoir un dispositif pouvant séparer une onde dans trois directions dans le même système hautement dispersif. Cette démonstration ouvre la voie à la conception de cristaux ne se reposant pas sur une géométrie hexagonale et se comportant comme des guides d'onde dans des milieux hautement dispersifs.

# 4

# CONCEPTION D'UN SÉPARATEUR D'ONDE ACOUSTIQUE À TROIS VOIES

Les résultats du chapitre précédent constituent une démonstration expérimentale de la pertinence du guidage topologique d'ondes de surface dans l'eau en utilisant un cristal composé d'une maille carrée et d'inclusions carrées. Cependant, il ne nous a pas été possible d'observer le phénomène de séparation d'onde à l'origine de la conception de ce cristal. Mais étant donné que le comportement des ondes de surface dans l'eau est régi en première approximation par une équation de la forme d'une équation de Helmholtz, tout comme les ondes acoustiques, nous avons pris la décision de reproduire les expériences du chapitre précédent en les adaptant à un cas acoustique. Le chapitre suivant s'appuie sur les résultats présentés dans [104] et se décomposera donc en une partie théorique présentant le modèle permettant de prévoir le comportement attendu du cristal, suivi d'une explication des procédures expérimentales et de leur résultats.

## 4.1/ ÉTUDE NUMÉRIQUE

Dans cette première partie, nous nous intéressons à la modélisation du comportement du cristal, d'abord en introduisant les différentes équations permettant d'en simuler le comportement, puis en étudiant l'impact de modifications géométriques sur la cellule unitaire composant le cristal.

### 4.1.1/ FORMULATION DU PROBLÈME

Nous avons fait le choix de nous intéresser à des ondes acoustiques dans l'eau plutôt que dans l'air pour plusieurs raisons. La première est que pour éviter les pertes visco-thermo-élastiques dans le cristal lors de l'utilisation d'ondes acoustiques dans l'air, il est nécessaire d'utiliser des fréquences d'excitation dans le domaine audible. Le comporte-

ment de notre cristal reposant sur les interférences de Bragg, cela implique l'utilisation de cellules unitaires de plusieurs dizaines de centimètres de côté. La deuxième raison est qu'un tel cristal nécessiterait l'utilisation d'un guide d'onde planaire permettant de canaliser les ondes acoustiques dans le cristal. À contrario, l'utilisation d'ondes acoustiques dans l'eau dont la fréquence est de l'ordre de plusieurs centaines de kilohertz permet d'obtenir à la fois des pertes négligeables et un cristal de taille compacte, de l'ordre de quelques centimètres pour plusieurs dizaines de cellules unitaires de côté. Le principal inconvénient à l'utilisation d'ondes acoustiques dans l'eau est qu'elles se couplent aux ondes élastiques dans les parties solides du cristal, donc les inclusions. Nous détaillons ce point par la suite.

Le cristal phononique que nous souhaitons étudier est composé de barres d'acier inoxydable de 1,5 millimètre de côté, immergées dans l'eau. La propagation des ondes acoustiques dans l'eau est décrite par l'équation d'onde scalaire

$$\nabla \cdot \left(\rho_1^{-1} \nabla p\right) = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \tag{4.1}$$

avec $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)^T$, $^T$ représentant la transposée, $p(r,t) = p(x,y,z,t)$ est l'écart entre la pression acoustique et la pression ambiante, $\rho_1$ est la masse volumique du fluide exprimée en kg·m$^{-3}$ et enfin $\kappa$, exprimé en Pa, correspond au module d'élasticité isostatique.

Le module d'élasticité isostatique de l'acier étant de deux ordres de grandeur plus grand que celui de l'eau, il est tentant de considérer qu'il existe un contraste infini entre ces deux milieux, comme nous l'avons considéré dans le chapitre 2. Cela impliquerait à nouveau l'utilisation d'une condition aux limites de Neumann à l'interface entre le milieu et les inclusions du cristal. Cependant, il a été montré par Laude et al. dans [69] que les ondes élastiques excitées dans les barres ont une influence sur la dispersion du cristal. Leur couplage avec les ondes acoustiques dans l'eau doit donc être pris en compte.

Nous modélisons l'acier comme un solide élastique à partir de l'équation de Navier

$$\nabla \cdot [\mathbb{C} : \nabla \mathbf{u}] = \rho_2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t^2}, \tag{4.2}$$

où le champ de déplacement $\mathbf{u}(r,t) = (u_1(r,t), u_2(r,t), u_3(r,t))^T$, et $\mathbb{C}$ est le tenseur d'élasticité d'ordre 4 dont les composantes sont $C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right)$ avec $i,j,k,l = 1,2,3$ et $\lambda$ et $\mu$ les coefficients de Lamé exprimés en Pa, $\rho_2$ la masse volumique du solide exprimée en kg·m$^{-3}$.

Les équations 4.1 et 4.2 sont reliées l'une à l'autre par deux conditions de couplage à l'interface entre le fluide et le solide. La première est que la pression dans le fluide est continue avec la traction normale dans le solide, ou autrement dit, $T_{ij}n_j = -pn_i$ où

$T = \mathbb{C} : \nabla\mathbf{u}$ est le tenseur des contraintes et $\mathbf{n}$ est la normale à l'interface entrant dans le fluide. La seconde condition est que l'accélération normale est continue et proportionnelle au gradient de pression du fluide selon

$$\mathbf{n} \cdot \left(\rho_1^{-1} \nabla p\right) = -\mathbf{n} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \tag{4.3}$$

avec cette fois $\mathbf{n}$ la normale entrant dans le solide.

Ainsi, en utilisant un modèle acousto-élastique nous prenons en compte la conversion des ondes de pression dans le fluide en ondes élastiques longitudinales et transverses dans le solide. Cet effet aurait été négligé si nous avions appliqué des conditions aux limites de Neumann [106].

### 4.1.2/ CONCEPTION DES CRISTAUX

Nous reprenons la géométrie proposée dans le chapitre 3, à savoir un cristal de maille carrée avec des inclusions carrées. Nous avons à notre disposition des barres d'acier inoxydable de 1,5 millimètres de côté, ce qui implique que la cellule unitaire doit être un carré de 3 millimètres de côté. Mais nous avons vu dans le chapitre précédent, lors du calcul du diagramme de bandes qu'un troisième cône de Dirac faisait son apparition le long de la branche $\Gamma X$ de la première zone de Brillouin, et que la rotation de l'inclusion avait pour effet d'ouvrir ce cône de Dirac, comme illustré sur la Figure 4.1.

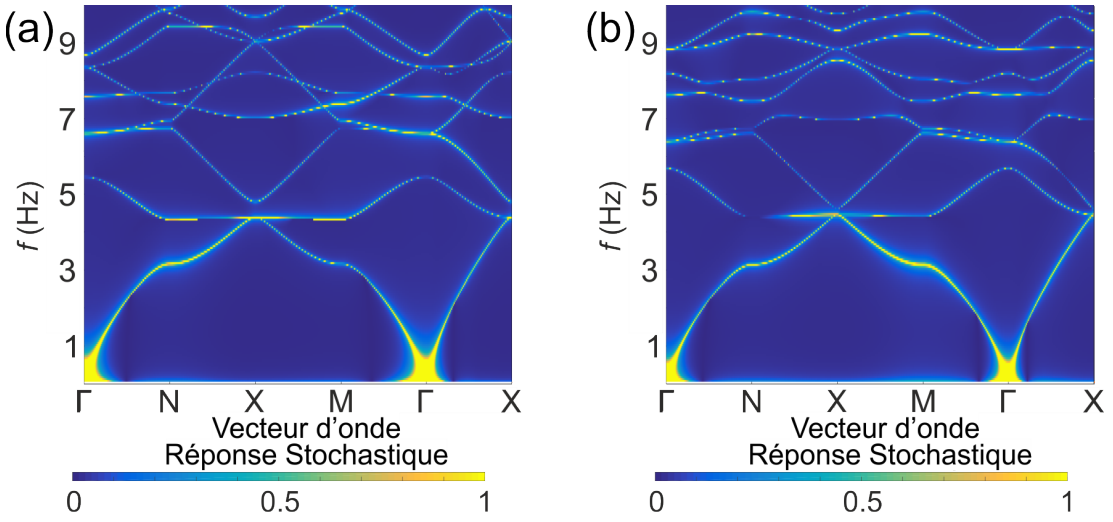



FIGURE 4.1 – (a) Diagramme de dispersion effectif du cristal à maille et inclusion carrée étudié précédemment, pour une orientation des inclusions de 0°. (b) Diagramme de dispersion obtenu pour une orientation des inclusions de 20°.

La question qui se pose alors est de savoir, dans l'éventualité où nous observerions un comportement de séparation d'onde au sein de notre cristal, si cet effet doit être imputé

à l'ouverture de ce troisième cône de Dirac. Pour tenter de répondre à cette question, il pourrait être judicieux de modifier la cellule unitaire de manière à briser les symétries diagonales pouvant être à l'origine de ce cône de Dirac, tout en conservant un cristal dont la géométrie est très proche de celle du premier. L'option qui nous est apparue comme la plus adaptée a été de considérer un cristal à maille rectangulaire et à inclusions carrées. En effet, nous n'avons à notre disposition que des barres d'acier inoxydable carrées, il nous fallait donc modifier la maille du cristal, comme le montre la Figure 4.2. L'utilisation d'une maille rectangulaire faisant disparaitre les symétries diagonales, nous nous attendons à observer la disparition du cône de Dirac le long du chemin $\Gamma X$.

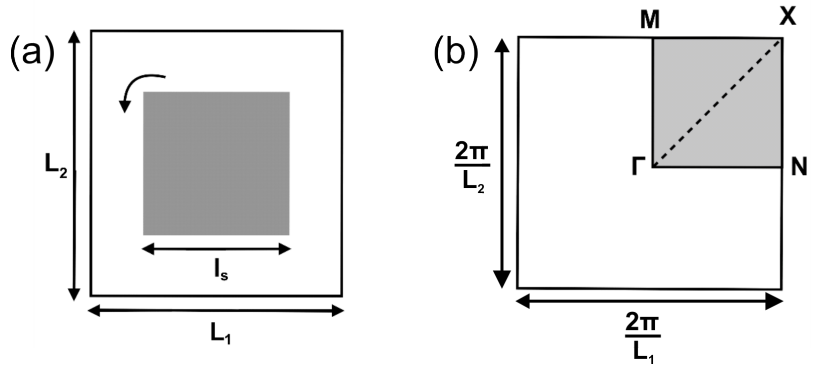



FIGURE 4.2 – (a) Configuration géométrique d'une cellule unitaire rectangulaire, avec $L_1 > L_2$ et $l_s$ = 3 mm. (b) Première zone de Brillouin correspondante.

Les cellules considérées par la suite sont donc une cellule carrée de 3 millimètres de côté avec une inclusion carrée de 1.5 millimètres de côté, une cellule rectangulaire avec un ratio $L_1/L_2 = 1.02$ avec la même inclusion carrée, et enfin une cellule rectangulaire avec un ratio $L_1/L_2 = 1.04$.

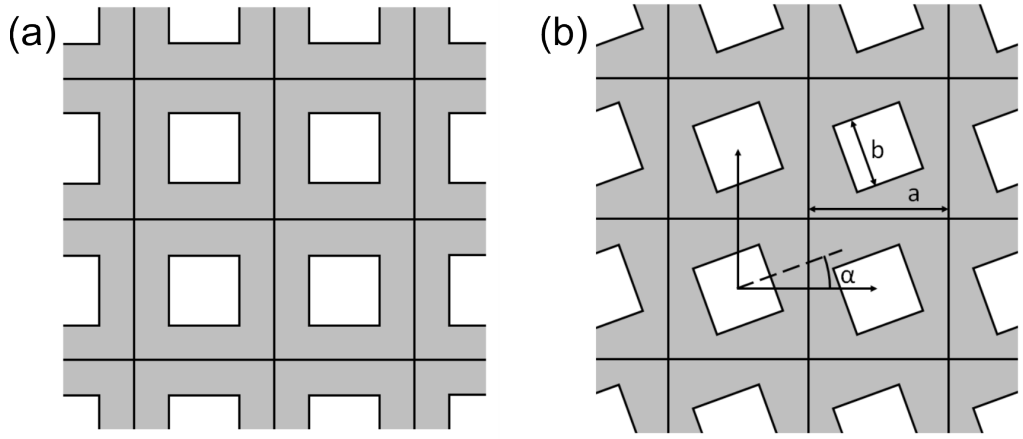



FIGURE 4.3 – (a) Géométrie initiale du cristal carré étudié. (b) Paramètres finaux du cristal utilisé : a = 3 mm, b = 1,5 mm, $\alpha = 20°$.

### 4.1.3/ CALCUL DES DIAGRAMMES DE DISPERSION DES CELLULES CARRÉES ET RECTANGULAIRES

Ne travaillant plus dans un milieu dispersif, nous n'appliquons plus la méthode de Laude et Korotyaeva. Nous utilisons le modèle acousto-élastique de COMSOL MultiPhysics. Il est à noter que des aberrations numériques apparaissent pour des fréquences comprises entre 400 et 600 kHz, il en résulte l'apparition de points sur le diagramme de dispersion dont nous ne tiendrons pas compte. Les résultats ont par ailleurs été vérifiés sur la base d'un autre code d'éléments finis, Freefem++, qui ne présente pas ces points aberrants et conduit exactement aux mêmes bandes. Les premiers résultats visibles sur la Figure 4.4 détaillent les résultats obtenus pour un cristal de maille carré de configuration similaire à celle étudiée dans le chapitre 3.

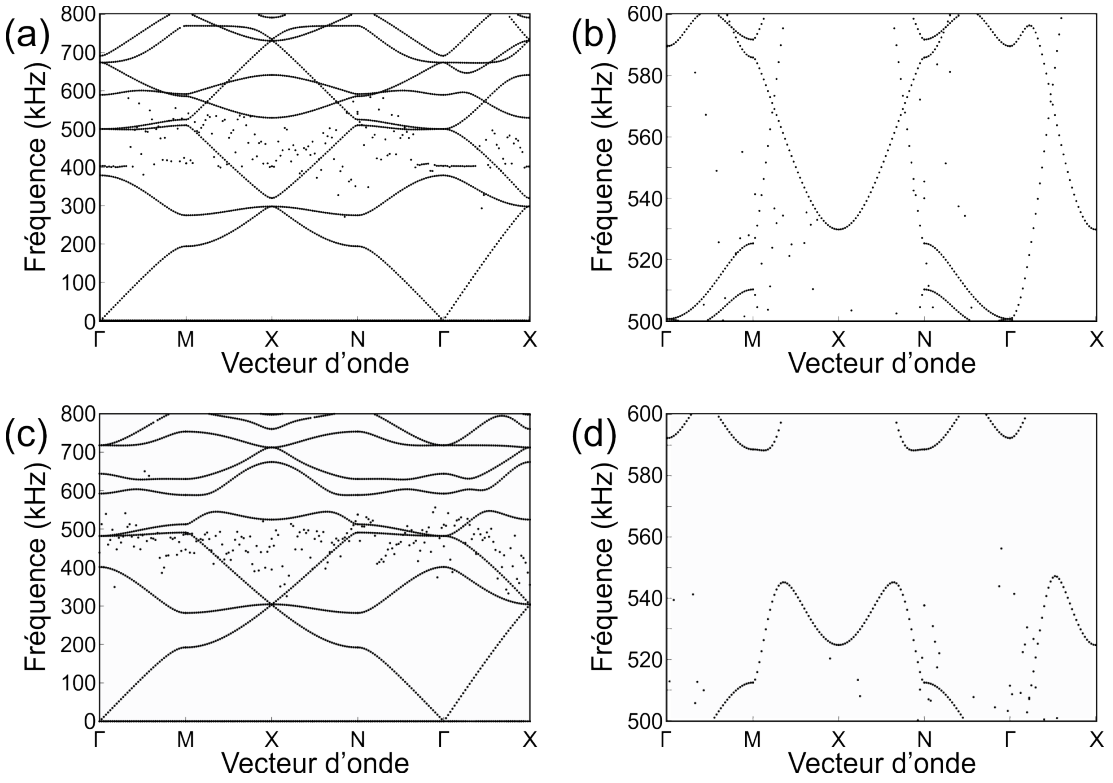



FIGURE 4.4 – (a) Diagramme de dispersion d'un cristal carré avec $\alpha = 0°$. (b) Détail du diagramme de dispersion (a) pour les fréquences comprises entre 500 et 600 kHz. Nous pouvons observer la localisation des trois cônes de Dirac à 570 kHz. (c) Diagramme de dispersion du même cristal avec $\alpha = 20°$. (d) Détail du diagramme de dispersion (c) pour les fréquences comprises entre 500 et 600 kHz. Nous pouvons observer l'ouverture d'une bande interdite pour des fréquences comprises entre 545 kHz et 590 kHz.

Nous retrouvons les trois cônes de Dirac précédemment observés, ainsi que leur ouverture menant à l'apparition d'une bande interdite lors de leur rotation. L'étape suivante de notre étude est le calcul des diagrammes de dispersion des cellules rectangulaires. Un point à observer est que nous ne voulons pas modifier le taux de remplissage des cellules

rectangulaires par rapport à la cellule carrée, ce qui implique que les longueurs $L_1$ et $L_2$ vérifient les relations suivantes : $L_1 = R \cdot L_2$, avec R le ratio liant $L_1$ et $L_2$, et $L_2 = 3/\sqrt{R}$. En effet, la variation du taux de remplissage peut mener au décalage en fréquence de la bande interdite, comme illustré sur la Figure 4.5.

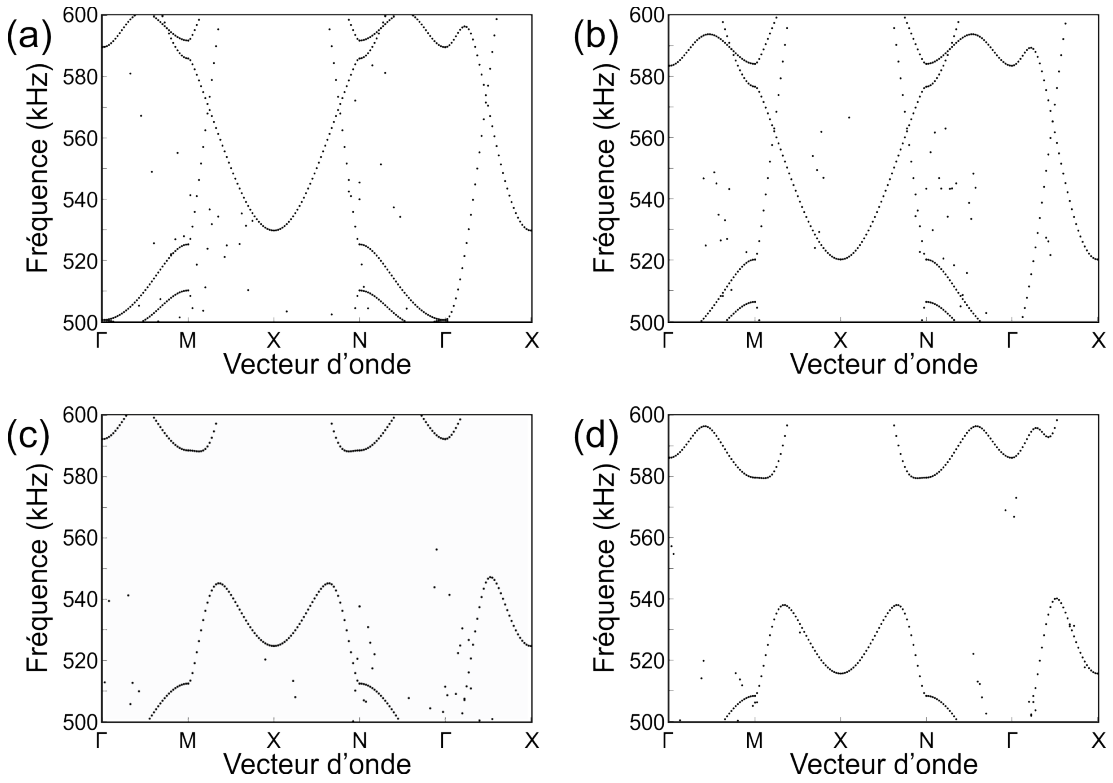



FIGURE 4.5 – Diagramme de dispersion d'une cellule de maille carrée avec $\alpha = 0°$ et un taux de remplissage de 0,25 (a) ou de 0,245 (b). Nous constatons un décalage en fréquence des cônes de Dirac, qui passent de 570 kHz à 560 kHz. Diagramme de dispersion d'une cellule de maille carrée avec $\alpha = 20°$ et un taux de remplissage de 0,25 (c) ou de 0,245 (d). Nous constatons un décalage en fréquence de la bande interdite qui passe de 545 et 590 kHz à 540 et 585 kHz.

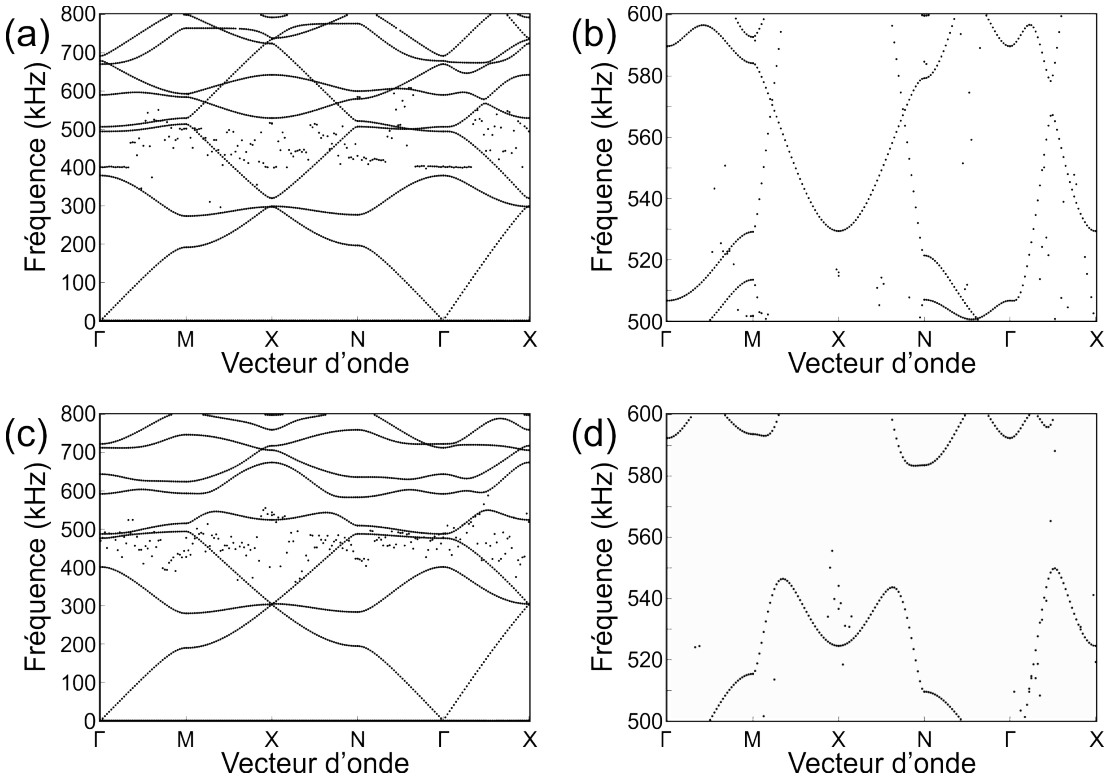



FIGURE 4.6 – (a) Diagramme de dispersion d'un cristal rectangulaire de ratio $L_1/L_2 = 1,02$ avec $\alpha = 0°$. (b) Détail du diagramme de dispersion (a) pour les fréquences comprises entre 500 et 600 kHz. Nous pouvons observer la localisation des deux premiers cônes de Dirac autour de 570 kHz. Nous pouvons cependant remarquer leur décalage. Nous constatons effectivement l'ouverture du troisième cône de Dirac. (c) Diagramme de dispersion du même cristal avec $\alpha = 20°$. (d) Détail du diagramme de dispersion (c) pour les fréquences comprises entre 500 et 600 kHz. Nous pouvons observer l'ouverture d'une bande interdite pour des fréquences comprises entre 550 kHz et 585 kHz.

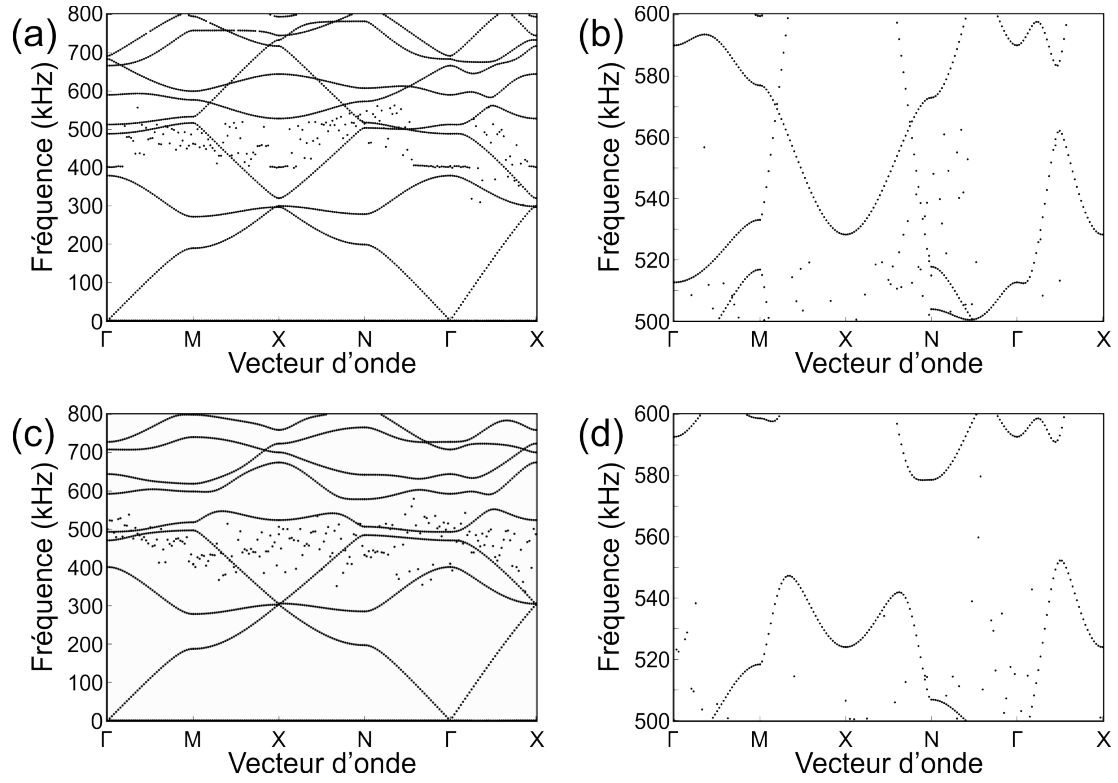



FIGURE 4.7 – (a) Diagramme de dispersion d'un cristal rectangulaire de ratio $L_1/L_2 = 1,04$ avec $\alpha$ = 0°. (b) Détail du diagramme de dispersion (a) pour les fréquences comprises entre 500 et 600 kHz. Nous pouvons observer la localisation des deux premiers cônes de Dirac autour de 570 kHz. Nous pouvons à nouveau remarquer leur décalage. Nous constatons à nouveau l'ouverture du troisième cône de Dirac (c) Diagramme de dispersion du même cristal avec $\alpha$ = 20°. (d) Détail du diagramme de dispersion (c) pour les fréquences comprises entre 500 et 600 kHz. Nous pouvons observer l'ouverture d'une bande interdite pour des fréquences comprises entre 555 kHz et 575 kHz.

Les résultats présentés sur les figures 4.4, 4.6 et 4.7 montrent que dans les trois cas, la rotation de l'inclusion permet l'ouverture d'une bande interdite complète, mais que dans le cas d'une cellule rectangulaire, elle ne résulte que de l'ouverture des deux premiers cônes de Dirac. En effet, le cône de Dirac précédemment visible le long du chemin $\Gamma$X disparaît du fait de la suppression des symétries diagonales, même en l'absence de rotation de l'inclusion. Il est à noter que l'écart entre les 4ème et 5ème bandes le long du chemin $\Gamma$X tend à croître en fonction de $L_1/L_2$, de même que le décalage en fréquence des cônes de Dirac le long des chemins NX et MX.

Cette suppression du troisième cône de Dirac se retrouve lors de l'étude des modes propres correspondants aux 4ème et 5ème bandes. Pour ce faire, nous relevons leur forme avant et après un cône de Dirac. Il apparaît alors que dans le cas d'une cellule carrée, le long des chemins NX, MX et $\Gamma$X, nous observons des modes de parité opposée qui se croisent. Mais dans le cas d'une cellule rectangulaire, ce n'est le cas que le long des chemins NX et MX, comme montré sur la Figure 4.8.

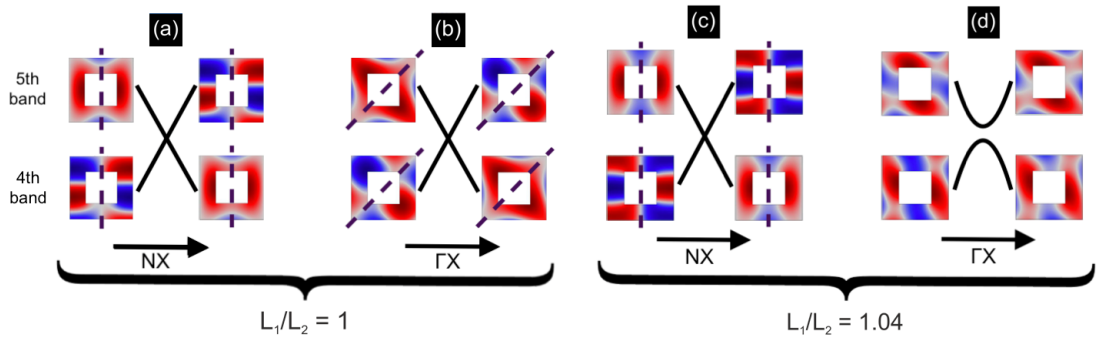



FIGURE 4.8 – Modes propres des 4ème et 5ème bandes des diagrammes de dispersion d'un cristal carré ($L_1/L_2 = 1$) et d'un cristal rectangulaire ($L_1/L_2 = 1,04$) pour deux nombres d'ondes distincts le long des chemins NX et ΓX. Ces nombres d'ondes sont choisis pour se situer de part et d'autre des cônes de Dirac présents le long de ces chemins. Dans le cas d'un cristal carré, nous observons deux modes de parités opposées, que ce soit le long du chemin NX (a), ou le long du chemin ΓX (b). En revanche, dans le cas d'un cristal rectangulaire, nous observons des modes de parité opposée le long du chemin NX (c), mais pas le long du chemin ΓX (d) en raison de la disparition de la symétrie diagonale de la cellule unitaire.

Il peut être tentant d'élargir l'écart entre ces deux bandes le long du chemin ΓX. Cependant, nous avons constaté qu'il était pour cela nécessaire d'augmenter le ratio $L_1/L_2$, or nous observons que la bande interdite obtenue pour un ratio $L_1/L_2 = 1,04$ est moins large que la bande interdite obtenue pour un ratio $L_1/L_2 = 1,02$. Cela est dû au décalage en fréquence entre les deux autres cônes de Dirac. Ainsi, il apparaît qu'un ratio $L_1/L_2$ trop élevé entraînerait la fermeture de la bande interdite et la perte du comportement topologique de notre cristal.

### 4.1.4/ CALCUL DES DIAGRAMMES DE DISPERSION DES INTERFACES

Nous avons vu dans le chapitre précédent la possibilité de guider des ondes en utilisant des modes d'interface résultant de la juxtaposition de cristaux symétriques. Le tracé du diagramme de dispersion nous permet de retrouver les deux modes d'interface déjà observés dans le cas d'un cristal carré.

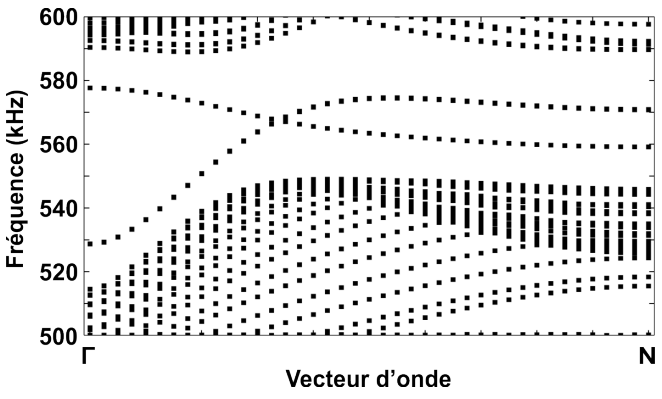


FIGURE 4.9 – Diagramme de dispersion d'une interface obtenue à partir d'un cristal carré.

Nous retrouvons deux modes de propagation dont les fréquences d'excitation sont comprises dans la gamme de fréquences correspondant à la bande interdite. Nous nous intéressons maintenant aux interfaces obtenues à partir d'un cristal rectangulaire. Cependant, comme $L_1 \neq L_2$ il est possible d'obtenir deux interfaces différentes pour un même ratio $L_1/L_2$, comme montré sur la Figure 4.10, selon que l'interface est issue de la juxtaposition des cellules le long de $L_1$ ou de $L_2$.

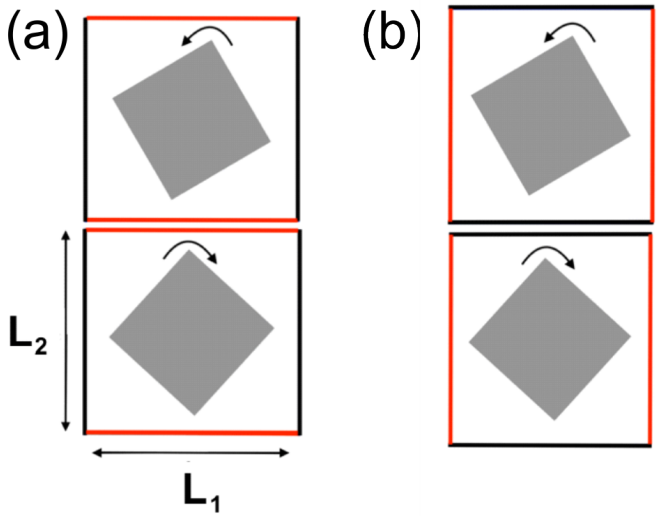



FIGURE 4.10 – Aperçu des deux interfaces qu'il est possible de construire à partir d'un même ratio $L_1/L_2$.

En raison de cette propriété, le calcul du diagramme de dispersion associé à un cristal rectangulaire mène à l'obtention de deux jeux de modes d'interface, comme le montrent les Figures 4.11 et 4.12.

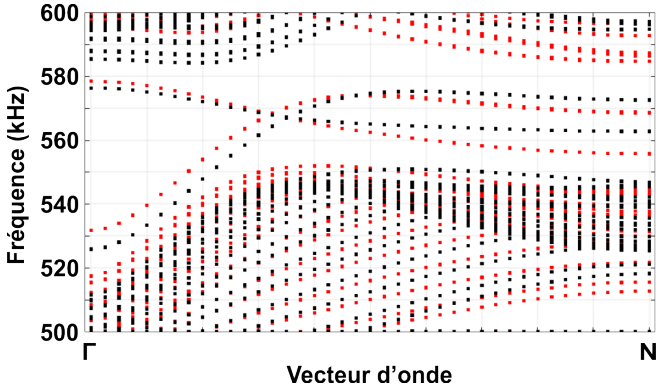



FIGURE 4.11 – Diagramme de dispersion d'une interface obtenue avec un cristal rectangulaire de ratio $L_1/L_2 = 1,02$, avec en rouge les résultats obtenus pour une interface le long de $L_1$ et en noir le long de $L_2$.

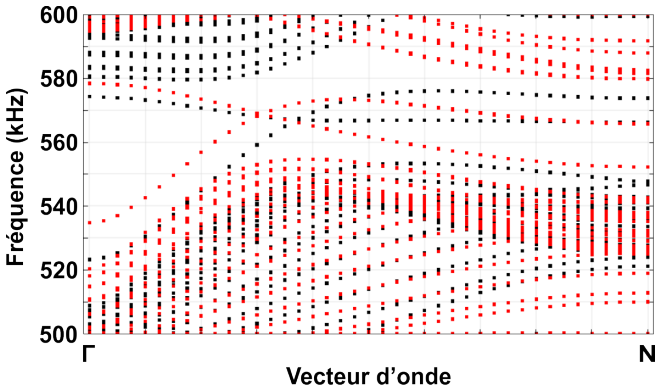



FIGURE 4.12 – Diagramme de dispersion d'une interface obtenue avec un cristal rectangulaire de ratio $L_1/L_2 = 1,04$, avec en rouge les résultats obtenus pour une interface le long de $L_1$ et en noir le long de $L_2$.

Nous constatons dans ces deux cas que les fréquences d'excitation des modes d'interface sont comprises dans la gamme de fréquence associée à la bande interdite d'un cristal uniforme. Cependant, comme dans le cas de cellules unitaires rectangulaires, l'asymétrie entre leurs côtés implique l'existence de deux interfaces distinctes permettant chacune la propagation d'un mode symétrique et d'un mode anti-symétrique, l'utilisation d'un cristal rectangulaire dans le cas d'une séparation d'onde dans trois directions implique l'utilisation de deux ensembles de modes d'interface qui ne couvrent pas exactement la même gamme de fréquences. Cela affecte la répartition entre les différents modes au passage d'un angle de $\pi/2$, et a pour conséquence une gamme de fréquence de fonctionnement plus réduite que dans le cas d'un cristal carré.

## 4.2/ VALIDATION EXPÉRIMENTALE

Le système étudié est visible sur la Figure 4.13 et consiste en un assemblage de 20x20 barres d'acier inoxydable de section carrée de 1,5 millimètres de côté et de 100 millimètres de longueur, immergées dans l'eau. Ces barres sont alignées et maintenues en position au moyen de deux plaques perforées imprimées en 3D. La Figure 4.13 présente un des échantillons utilisés lors de ces expériences.

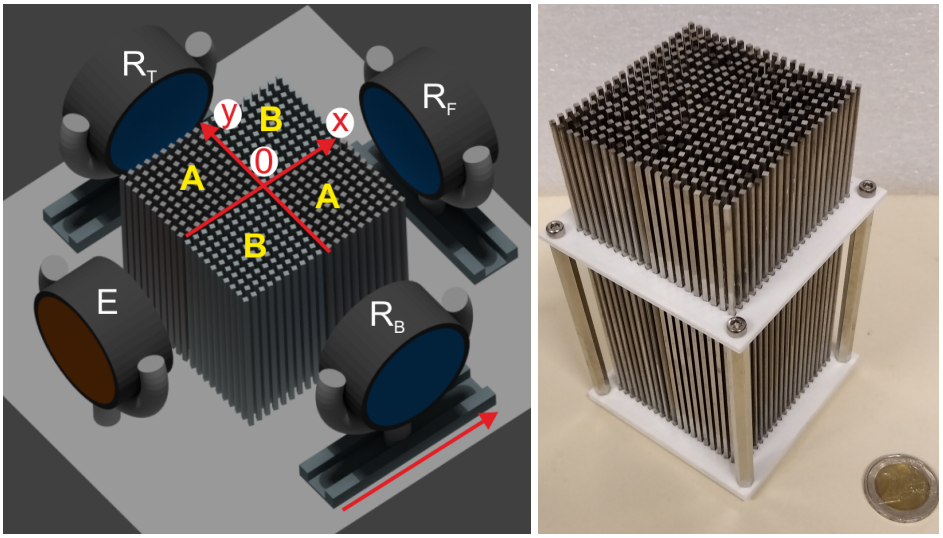



FIGURE 4.13 – (a) Schéma du dispositif expérimental utilisé pour caractériser le cristal visible en (b). Le cristal est immergé durant les mesures.

Un transducteur ultrasonore d'un diamètre de 25,4 millimètres permet l'émission d'une impulsion de forme gaussienne dont la fréquence centrale est de 600 kHz et dont la largeur à mi-hauteur est supérieure à 100 kHz, comme le montre la Figure 4.14. Le récepteur est un transducteur identique. Le comportement en fréquence du cristal étudié est alors obtenu en effectuant une transformée de Fourier du signal reçu.

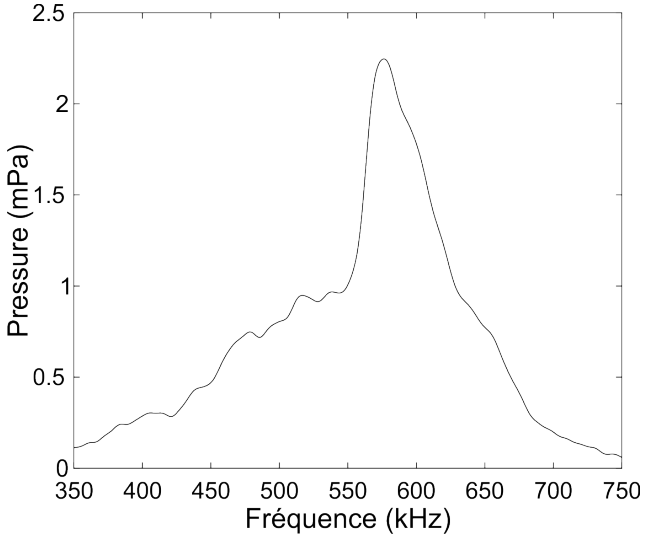



FIGURE 4.14 – Intensité du signal émis en fonction de la fréquence.

Le champ de pression sortant du cristal est mesuré en différentes positions à 10 millimètres du bord du cristal, puis une opération de déconvolution permet de comparer les résultats expérimentaux avec les résultats numériques.

### 4.2.1/ VALIDATION NUMÉRIQUE

Avant de vérifier expérimentalement le comportement d'un séparateur d'ondes à trois voies, nous procédons à une validation théorique via des simulations par éléments finis au moyen du logiciel COMSOL MultiPhysics. Le tracé de cartes de champ du système étudié pour des fréquences comprises dans la bande interdite du cristal doit permettre l'observation des comportements attendus. Nous limitons les simulations à un cas bi-dimensionnel en supposant une invariance selon la troisième dimension.

### 4.2.2/ OBSERVATION D'UN COMPORTEMENT TOPOLOGIQUE

La première étape, préliminaire à l'observation d'un comportement topologique, est la nécessité d'avoir un cristal présentant une bande interdite complète. La nature gaussienne du faisceau émis par l'émetteur permet de s'assurer qu'en cas de bande interdite mesurée, celle-ci ne soit pas directionnelle. Le premier échantillon étudié est donc composé d'un assemblage d'inclusions présentant la même orientation de +20°, selon une maille carrée de paramètre de maille 3 millimètres. La Figure 4.15 présente les résultats numériques et les résultats expérimentaux.

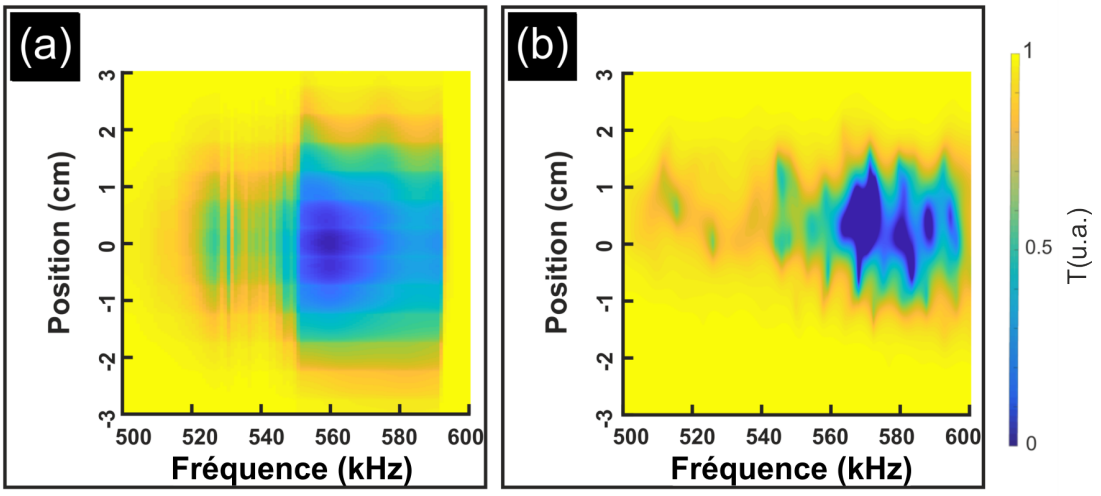



FIGURE 4.15 – Diagramme de transmission relative obtenu numériquement (a) et expérimentalement (b) avec un cristal carré dont toutes les inclusions sont orientées à $\alpha = 20°$.

Les résultats numériques montrent l'ouverture d'une bande interdite complète pour des fréquences comprises entre 550 kHz et 590 kHz. Expérimentalement, la bande interdite complète se situe entre 555 kHz et 595 kHz, soit un décalage inférieur à 1% des prévisions.

L'étape suivante est l'étude d'un cristal présentant une interface, comme le montre la

Figure 4.16. Nous ne nous intéresserons qu'à un cristal avec une maille carrée. Les simulations sont retravaillées afin de refléter le comportement d'un récepteur de 25,4 millimètres de diamètre. Les résultats numériques montrent l'existence d'une transmission plus importante dans la région proche de l'interface pour des fréquences appartenant à la bande interdite complète. Nous retrouvons des résultats similaires expérimentalement, avec une transmission plus importante au niveau de l'interface pour des fréquences comprises entre 555 kHz et 570 kHz, comme illustré sur la Figure 4.17. Expérimentalement, nous remarquons l'absence de la hausse de transmission observée à 575 kHz dans les simulations numériques. Cela peut s'expliquer par une différence entre les constantes réelles du matériau et celles utilisées dans la simulation, ou encore de faibles défauts d'alignement des barres en acier.

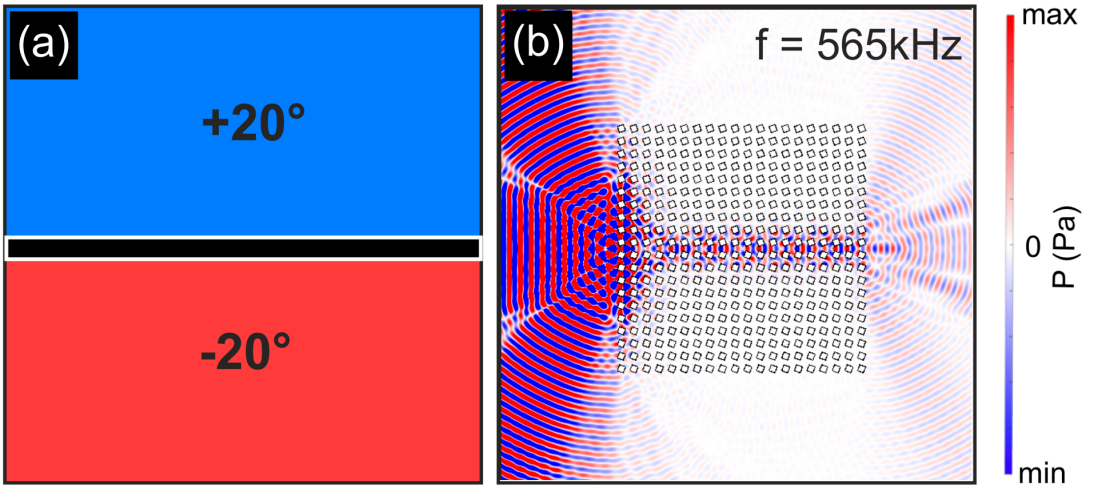



FIGURE 4.16 – (a) Configuration du cristal à interface étudié et (b) carte de champ obtenue pour une fréquence d'excitation de 565 kHz.

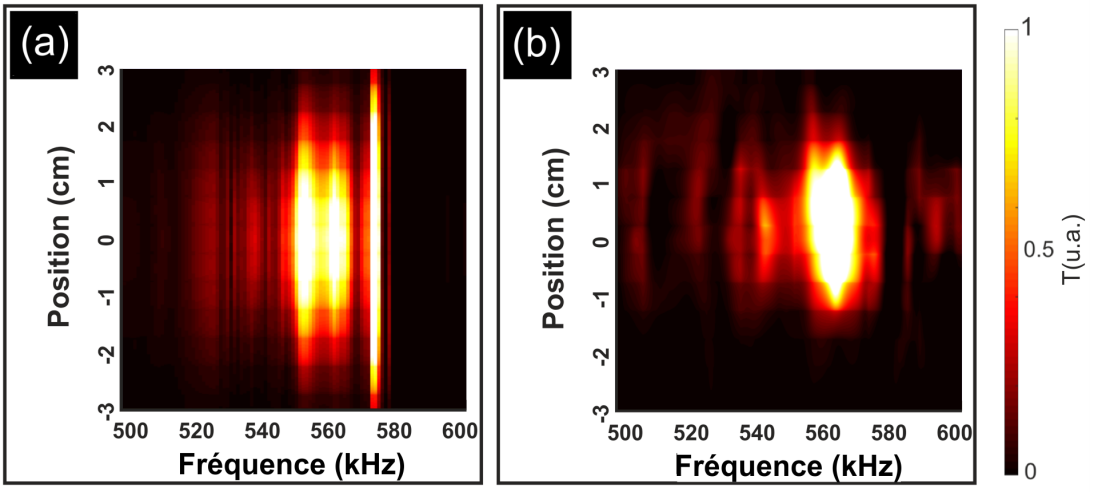



FIGURE 4.17 – Diagramme de transmission relative obtenu numériquement (a) et expérimentalement (b).

### 4.2.3/ VALIDATION DU COMPORTEMENT DU SÉPARATEUR D'ONDE TROIS VOIES

L'existence d'un comportement topologique ayant été validée expérimentalement, nous étudions maintenant le comportement d'un cristal séparateur d'onde. Le premier cristal étudié est aussi un cristal à maille carrée, présentant deux assemblages de 10x10 barres orientées à +20° et deux autres à -20°. Chaque zone est disposée de manière à n'être en contact qu'avec des zones dont les barres ont une orientation différente, tel que le montre la Figure 4.18.

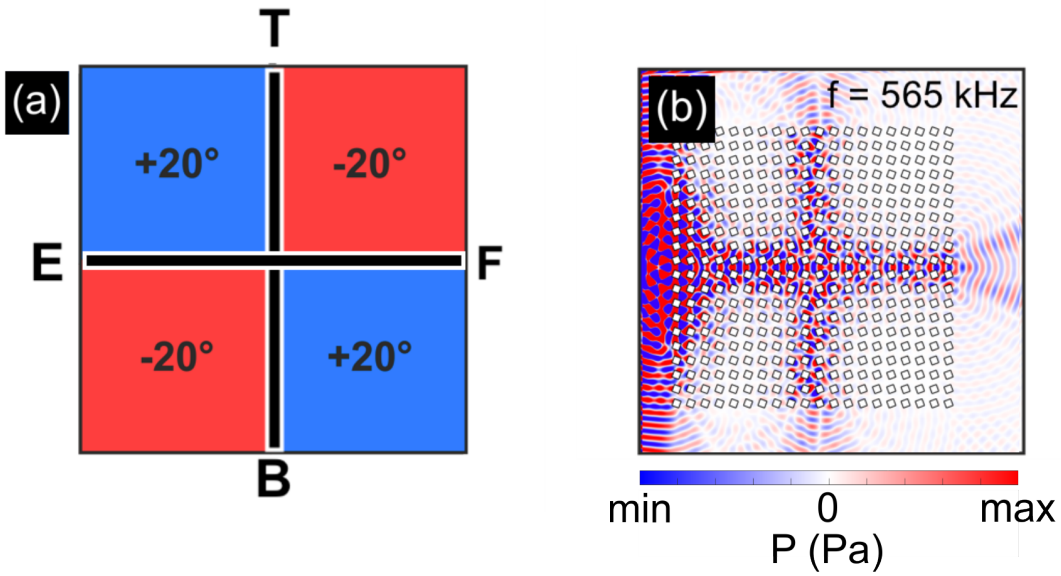



FIGURE 4.18 – (a) Configuration du cristal séparateur d'ondes à maille carrée et (b) carte de champ obtenue pour une fréquence d'excitation de 565 kHz.

La carte de champ numérique indique la possibilité de séparer une onde dans trois directions. Les résultats numériques montrent sur la Figure 4.19 une hausse de la transmission commune aux trois côtés du cristal pour des fréquences comprises entre 560 kHz et 575 kHz, ce qui correspond à des fréquences comprises dans la gamme de fréquences de la bande interdite.

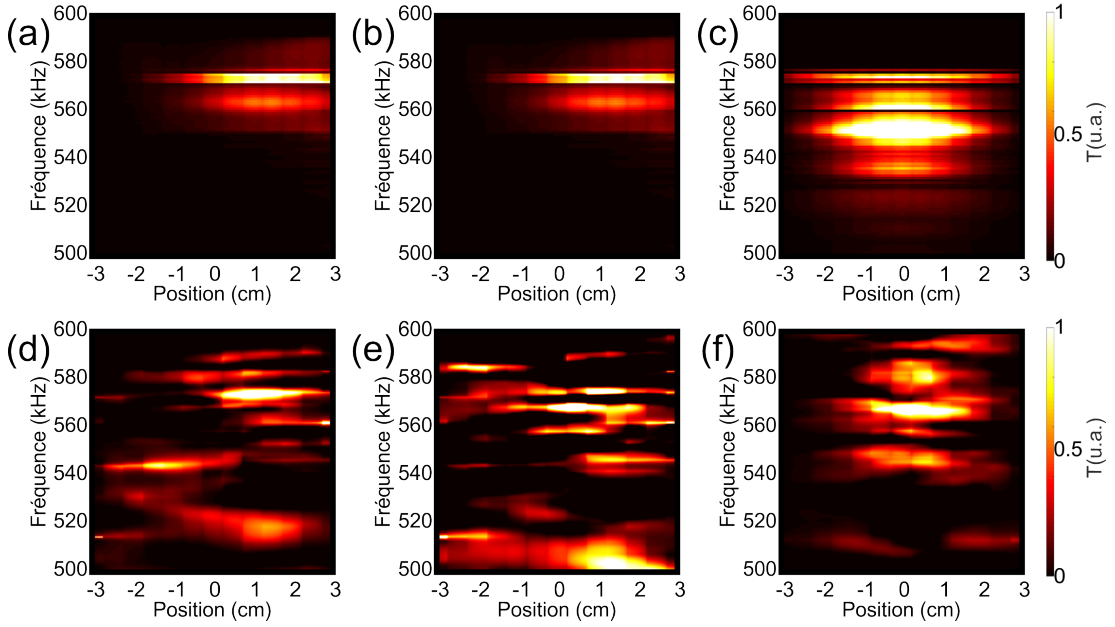



FIGURE 4.19 – Diagrammes de transmission relative associés à un cristal séparateur d'ondes à maille carrée. Résultats obtenus numériquement (a, b et c) et expérimentalement (d, e et f). (a) et (d) résultats obtenus pour la position T, (b) et (e) résultats obtenus pour la position B, (c) et (f) résultats obtenus pour la position F.

Nous retrouvons expérimentalement une hausse de la transmission relative pour une fréquence d'excitation proche de 570 kHz, et pour des localisations correspondant à celles obtenues numériquement.

Nous étudions ensuite le comportement d'un cristal à maille rectangulaire pour lequel $L_1/L_2 = 1,02$. La première conséquence de ce changement est l'asymétrie entre l'interface verticale et l'interface horizontale du cristal, comme illustré sur la Figure 4.20.

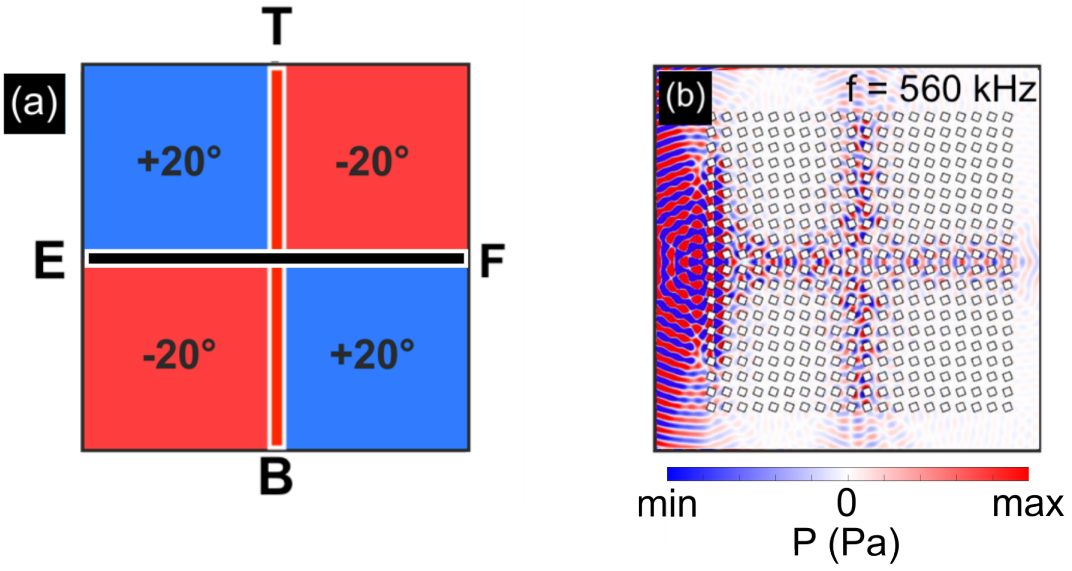


FIGURE 4.20 – (a) Configuration du cristal séparateur d'ondes à maille rectangulaire et (b) carte de champ obtenue pour une fréquence d'excitation de 565 kHz.

Malgré cette différence, il apparaît sur la carte de champ visible sur la Figure 4.20 qu'il est possible de concevoir un séparateur d'ondes trois voies à partir d'un cristal rectangulaire.

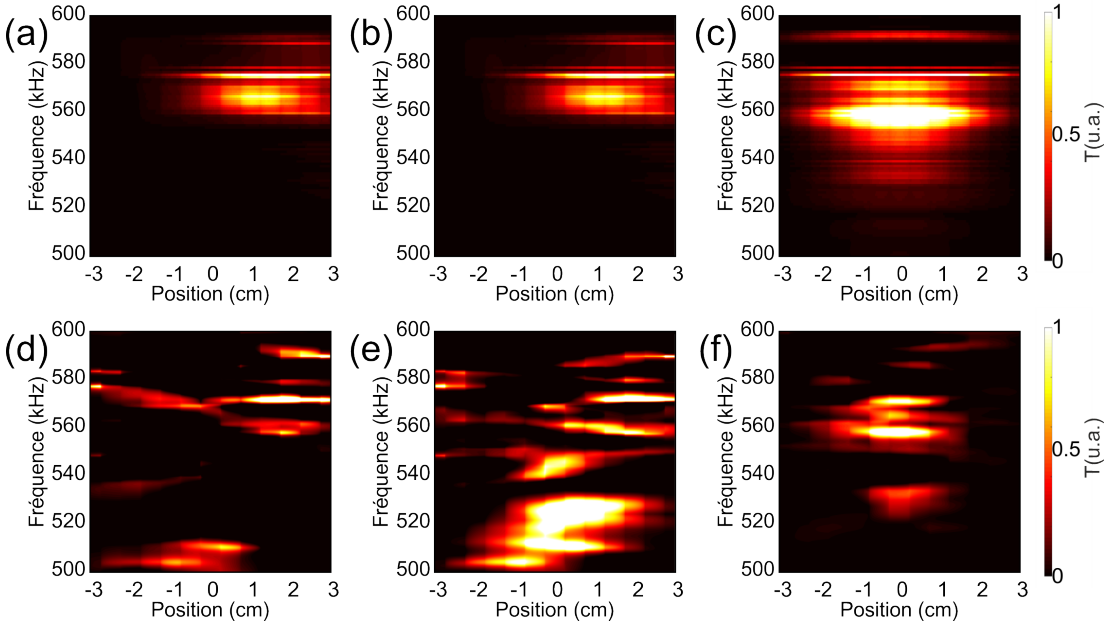



FIGURE 4.21 – Diagrammes de transmission relative associés à un cristal séparateur d'ondes à maille rectangulaire. Résultats obtenus numériquement (a, b et c) et expérimentalement (d, e et f). (a) et (d) résultats obtenus pour la position T, (b) et (e) résultats obtenus pour la position B, (c) et (f) résultats obtenus pour la position F.

La différence entre l'interface verticale et l'interface horizontale du cristal se manifeste au niveau de la transmission en position T et B du cristal, lorsque nous comparons les simulations entre un cristal rectangulaire et un cristal carré, alors que les résultat en position F sont sensiblement les mêmes. Cependant, nous retrouvons bien une hausse de la transmission relative pour des fréquences d'excitation comprises entre 560 kHz et 575 kHz. Expérimentalement, nous constatons une différence entre les deux cristaux, mais nous retrouvons bien une transmission plus importante pour des fréquences proches de 570 kHz, et pour des localisations similaires à celles obtenues numériquement.

### 4.2.4/ CONCEPTION DE CIRCUITS ACOUSTIQUES TOPOLOGIQUES AVANCÉS

La possibilité de séparer les ondes dans trois directions ouvre la voie à la conception de nouveau circuits acoustiques topologiques. Le premier que nous nous proposons d'étudier est un circuit en forme de trident. Composé de 40x40 barres, sa géométrie, présentée sur la Figure , doit permettre le transport d'une onde en trois points d'un même côté du cristal, comme illustré par la Figure 4.22.

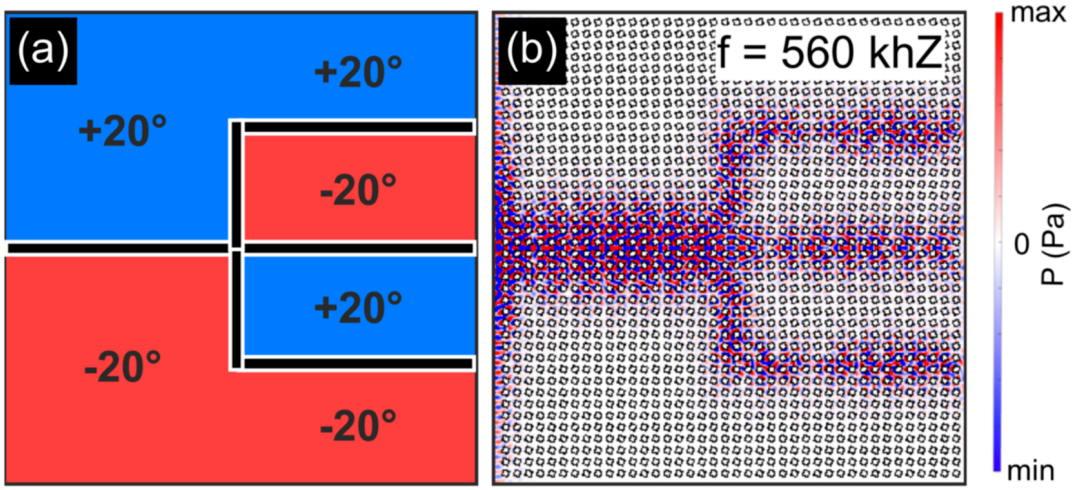



FIGURE 4.22 – (a) Configuration du circuit en trident. (b) Carte de champ obtenue pour une fréquence d'excitation de 560 kHz.

Nous procédons à nouveau à des simulations numériques de notre système, en reprenant le modèle utilisé précédemment, dont les résultats sont visibles sur la Figure 4.23. Ces simulations montrent cependant la limite de l'utilisation d'un transducteur de diamètre 25,4 millimètres. En effet, la diffraction du champ sortant perturbe la localisation précise des trois sorties.

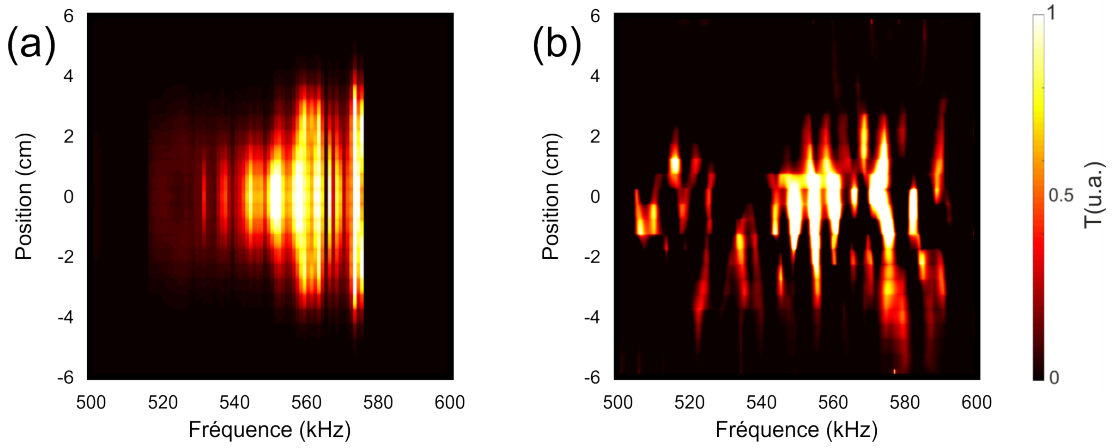



FIGURE 4.23 – (a) Diagramme de transmission relative en sortie du circuit en trident. (b) Diagramme de transmission relative expérimental.

Les résultats expérimentaux montrent bien une hausse de la transmission pour des fréquences comprises entre 540 kHz et 580 kHz, mais cette hausse est principalement localisée au niveau de l'interface horizontale et ne permet pas d'attester expérimentalement avec certitude de l'existence du comportement attendu.

En utilisant un pas d'étude plus court et en relevant les changements de pression à l'intérieur du cristal entre la dernière et l'avant-dernière rangée de barres, le comporte-

ment du guide se manifeste de manière évidente, comme présenté sur la Figure 4.24.

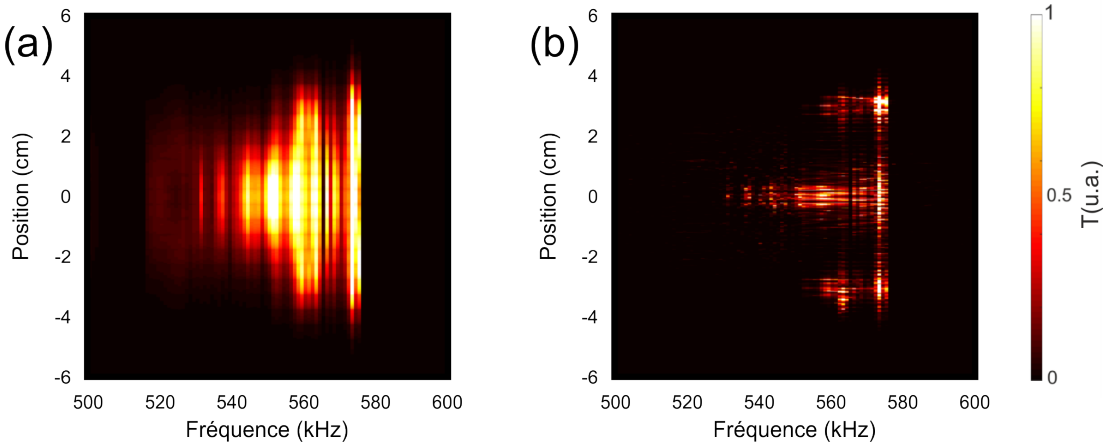



FIGURE 4.24 – (a) Diagramme de transmission relative en sortie du circuit en trident simulant les résultats attendus avec un transducteur de 25,4 mm de diamètre. (b) Diagramme de transmission relative en sortie du circuit en trident simulant les résultats attendus avec un transducteur de 0,1 mm de diamètre.

## 4.3/ CONCLUSION

À l'issue de ces travaux, nous avons démontré la possibilité de concevoir un cristal phononique présentant un comportement topologique sans reprendre la géométrie du graphène. Ce comportement a été démontré grâce à l'emploi d'ondes acoustiques, ce qui complète l'étude précédente ayant été faite au moyen d'ondes de gravité-capillarité. Nous avons de plus démontré la possibilité de réaliser un dispositif de séparateur d'ondes trois voies, ce qui ouvre de nouvelles perspectives dans le développement de dispositif de guidage d'ondes. Nous n'avons cependant pas été en mesure de mettre sans ambiguïté en évidence le comportement spécifique d'un guide d'ondes en trident, notamment en raison des dimensions des transducteurs utilisés.

# CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

Les objectifs de cette thèse étaient de concevoir des cristaux phononiques présentant un comportement topologique pour un milieu fortement dispersif et s'affranchissant de la géométrie la plus utilisée pour obtenir un comportement topologique, à savoir, la géométrie du graphène. En effet, à l'heure où cette thèse débutait, toutes les expériences impliquant des cristaux phononiques 2D présentant un comportement topologique fondé sur une brisure de symétrie reposaient sur une géométrie hexagonale et des milieux non-dispersifs ou pour lesquels la dispersion était négligeable. Ce dernier point n'est pas applicable à la majorité des milieux physiques, ce qui limite le nombre d'applications pouvant être réalisées au moyen de cristaux phononiques topologiques. De même, le fait de se limiter à une géométrie similaire à celle du graphène réduit le nombre de dispositifs pouvant être conçus.

La première étape de ce travail a donc été de vérifier qu'il est possible d'obtenir un comportement topologique dans un milieu fortement dispersif. Les ondes que nous avons choisi d'observer sont des ondes se propageant à la surface de l'eau, c'est-à-dire des ondes de gravité-capillarité. Ce choix a été motivé par la simplicité et la rapidité des expériences, ainsi que de leur exploitation. Le dispositif utilisé a consisté en une cuve à ondes, d'un agitateur mécanique et d'une caméra. Les cristaux étudiés quant à eux ont été réalisés au moyen d'une imprimante 3D, ce qui a permis d'en concevoir un grand nombre rapidement. La géométrie retenue a consisté en un motif hexagonal de piliers triangulaires. Une telle géométrie avait déjà été utilisée pour concevoir un cristal phononique topologique pour des ondes acoustiques dans l'air (Valley Spin-Hall Effect). En raison de la similarité des équations décrivant la propagation d'ondes acoustiques dans l'air et la propagation d'ondes à la surface de l'eau, il semble logique de penser qu'une géométrie permettant l'obtention d'un comportement topologique pour l'un des deux types d'ondes puisse être adaptée à l'autre. C'est ce qui a été fait en changeant les paramètres géométriques du cristal, notamment le paramètre de maille, l'orientation des piliers et le taux de remplissage des cellules unitaires, afin d'obtenir la bande interdite le plus large possible pour notre cristal. Une fois cette étape franchie, nous avons conçu deux interfaces différentes à partir de ce cristal, susceptibles de présenter un comportement topologique. Cependant, nous avons démontré théoriquement que seul

le comportement topologique de l'une d'elles est excitable au moyen d'ondes planes , ce que nous avons vérifié expérimentalement. Nous sommes donc parvenus à concevoir un cristal phononique présentant un comportement topologique pour des ondes de gravité-capillarité. Mais au cours de son développement, nous nous sommes rendu compte de la forte influence de la capillarité sur le comportement de ce cristal, qui s'est manifesté notamment par le fait que le comportement en fréquence de notre cristal était décalé par rapport aux premières projections, ce qui nous a obligé à repenser notre dispositif expérimental pour la suite de notre étude.

La deuxième étape de ce travail a été la conception d'un cristal phononique topologique dont la géométrie n'est pas similaire à celle du graphène. La manière la plus simple de procéder est de renoncer à utiliser une maille hexagonale. Nous avons donc choisi une géométrie carrée, ainsi que des inclusions carrées. Cette géométrie permet en théorie la conception d'un dispositif ne pouvant pas être conçu à partir d'une géométrie hexagonale, à savoir un séparateur d'ondes à trois voies. Le dispositif utilisé pour caractériser ces cristaux a consisté à nouveau en une cuve à ondes, un agitateur numérique et une caméra, mais les dimensions du cristal et des inclusions à présent utilisés ont permis de réduire l'influence de la capillarité. En conséquence, les dimensions de la cuve à ondes utilisée sont plus importantes que celle utilisée précédemment. Les échantillons étudiés sont composés de tubes d'aluminium de section carrée maintenus en position par un support imprimé en trois dimensions. À l'issue de nos expériences, nous avons mis en évidence le comportement topologique de cette géométrie, mais nous n'avons pas pu démontrer la faisabilité d'un dispositif séparateur d'ondes trois voies. Une fois encore, la capillarité est à l'origine de ce phénomène, car la distance séparant deux inclusions successives est environ égale à la longueur capillaire de l'eau, ce qui est suffisant pour éviter un décalage en fréquence du comportement du cristal, mais pas pour éviter l'atténuation des ondes de gravité-capillarité au passage des inclusions.

La troisième étape de notre travail a consisté en la conception d'un cristal phononique topologique reprenant cette géométrie carrée, mais en la transposant au cas des ondes acoustiques dans l'eau. En effet, les pertes associées à ces ondes sont négligeables aux fréquences ultrasonores. Les échantillons étudiés consistent cette fois en des assemblages de tiges d'acier de 1,5 millimètres de côté, maintenus en position par des supports imprimés en trois dimensions. Une pulsation ultrasonore centrée sur 600 MHz est émise par un haut-parleur au niveau d'une des faces du cristal, puis nous relevons avec un deuxième transducteur les niveaux de pression en différentes positions des autres faces du cristal, afin de reconstituer le profil de transmission relative en fonction de la fréquence et de la position. Un comportement topologique se traduit ainsi par une hausse de la transmission localisée au niveau de l'interface présente au sein du cristal. Nous avons pu observer de tels comportements pour un cristal présentant une interface, mais aussi pour un séparateur d'ondes à trois voies. Une autre géométrie étudiée consistait en des

cristaux présentant une maille rectangulaire et des inclusions identiques, et nous avons à nouveau observé un comportement topologique, mais aussi le fonctionnement d'un séparateur d'onde à trois voies. Dans la continuité de ces résultats, nous avons conçu un nouveau dispositif consistant en un séparateur d'onde à trois voies doublé de deux bifurcations, permettant de former un trident. Il était attendu de ce dispositif d'observer une hausse de la transmission en trois points de la face du cristal opposée à l'émetteur. Malheureusement, en raison de la taille du transducteur utilisé, nous n'avons pas été en mesure d'observer ce comportement de façon non ambigüe.

Les perspectives de ces travaux seraient donc dans un premier temps de reproduire l'expérience du guide d'onde en trident en se munissant cette fois d'un transducteur plus fin, permettant de relever les différences de pression entre chaque paire d'inclusion, de manière à valider ou non le fonctionnement d'un tel guide d'onde. De tels cristaux pourraient être envisagés pour des installations destinées à récupérer l'énergie portée par les vagues, ou encore à protéger de l'érosion des zones fragiles des littoraux. Il serait alors intéressant de se pencher sur la conception d'un cristal similaire, mais flottant cette fois, afin de limiter la quantité de matière mise en jeu. Une autre perspective d'étude serait la réalisation d'un cristal phononique topologique dont les inclusions ne présentent pas la même orientation, de manière à pouvoir construire plusieurs interfaces pouvant guider différentes ondes au sein d'un même cristal, ce qui pourrait avoir des applications dans des dispositifs de filtrage d'onde.

Enfin, les expériences acoustiques dans l'eau et à la surface de l'eau permettent d'implémenter la plupart des cristaux topologiques à deux dimensions passifs, c'est-à-dire fondés sur la brisure de symétrie lors d'une transition topologique plutôt que sur la brisure de la symétrie temporelle. Cela nous laisse envisager la possibilité de réutiliser nos dispositifs pour étudier d'autres principes topologiques, comme par exemple des isolants topologiques d'ordre supérieur permettant d'obtenir des modes de coin ou des cristaux présentant une symétrie $C_6$ plutôt que $C_3$. Un autre aspect pouvant être étudié au moyen des ondes à la surface de l'eau sont les transformations de coordonnées qui permettent de masquer le passage d'un obstacle par un front d'onde.

# CONTRIBUTIONS

## LISTE DES PUBLICATIONS

— **Laforge N.**, Laude V., Chollet F., Khelif A., Kadic M., Guo Y., Fleury R., Observation of topological gravity-capillary waves in a water wave crystal, New Journal of Physics **21**, 083031 (2019).

— Xueyan C., Moughames J., Qingxiang J., Martínez J.A.I., Tan H-F., Adrar S., **Laforge N.**, Cote J-M., Euphrasie S., Ulliac G., Kadic M., Laude V., Optimal isotropic, reusable truss lattice material with near-zero Poisson's ratio, Extreme Mechanics Letters **41**, 101048 (2020).

— Makwana M.P., **Laforge N.**, Craster R.V., Dupont G., Guenneau S., Laude V., Kadic M., Experimental observations of topologically guided water waves within non-hexagonal structures, Applied Physics Letters **116**, 131603 (2020).

— **Laforge N.**, Wiltshaw R., Craster R.V., Laude V., Martínez J.A.I., Dupont G., Guenneau S., Kadic M., Makwana M.P., Acoustic topological circuitry in square and rectangular phononic crystals, submitted, arXiv :2012.08014 (2021).

— Xueyan C., **Laforge N.**, Qingxiang J., Tan H-F., Liang J., Ulliac G., Moughames J., Adrar S., Laude V., Kadic M., Introduction to mechanical metamaterials and their effective properties, Comptes Rendus. Physique **21**, 751-765 (2020).

## LISTE DES PRÉSENTATIONS

— Oral, **Laforge N.**, Guided waves along a domain wall of a water wave crystal, Rencontre thématique du GDR Ondes 2451 Ondes et Topologie, Besançon, France.

— Oral, **Laforge N.**, Guided water waves along a domain wall in a Quantum Valley Hall Effect (QVHE) crystal, Metamaterials'2019, Rome, Italy.

— Oral, **Laforge N.**, Circuits acoustiques topologiques issus de cristaux phononiques carrés et rectangulaires, Webinar GDR Ondes Désordre et corrélation, France.

# BIBLIOGRAPHIE


**[1]** LLOWARCH, W. **Application of the Schlieren technique to the study of ripples**. *Nature 178*, 4533 (1956), 587.

**[2]** ARIS, R. **Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics**. Prentice-Hall international series in the physical and chemical engineering sciences. Prentice-Hall, 1962.

**[3]** FARNELL, G. W. **Types and properties of surface waves**. *Top. Appl. Phys. 24* (1978). Ed. by A.A. Oliner, Springer-Verlag (Berlin).

**[4]** LIGHTHILL, M. J. **Waves in Fluids**. Cambridge University Press, 1978.

**[5]** MILES, J. W. **The dynamics of the upper ocean, 2nd edition**. *J. Fluid Mech. 88* (1978), 793.

**[6]** VON KLITZING, K., DORDA, G., AND PEPPER, M. **New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized Hall resistance**. *Phys. Rev. Lett. 45* (1980), 494.

**[7]** THOULESS, D. J., KOHMOTO, M., NIGHTINGALE, M. P., AND DEN NIJS, M. **Quantized hall conductance in a two-dimensional periodic potential**. *Phys. Rev. Lett. 49* (1982), 405.

**[8]** HAJNAL, J., TEMPLER, R., AND UPSTILL, C. **A ripple tank for studying optical caustics and diffraction**. *Eur. J. Phys. 5*, 2 (1984), 81.

**[9]** HALDANE, F. D. M. **Model for a quantum Hall effect without Landau levels : Condensed-matter realization of the "parity anomaly"**. *Phys. Rev. Lett. 61* (1988), 2015–2018.

**[10]** HEEGER, A. J., KIVELSON, S., SCHRIEFFER, J. R., AND SU, W. P. **Solitons in conducting polymers**. *Rev. Mod. Phys. 60* (1988), 781–850.

**[11]** LINTON, C. M., AND EVANS, D. V. **The interaction of waves with arrays of vertical circular cylinders**. *Journal of Fluid Mechanics 215* (1990), 549–569.

**[12]** HATSUGAI, Y. **Chern number and edge states in the integer quantum Hall effect**. *Phys. Rev. Lett. 71* (1993), 3697.

**[13]** KUSHWAHA, M. S., HALEVI, P., DOBRZYNSKI, L., AND DJAFARI-ROUHANI, B. **Acoustic band structure of periodic elastic composites**. *Phys. Rev. Lett. 71* (1993), 2022–2025.

**[14]** BERENGER, J.-P. **A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves**. *Journal of computational physics 114*, 2 (1994), 185–200.

**[15]** MARTÍNEZ-SALA, R., SANCHO, J., SANCHEZ, J. V., GOMEZ, V., LLINARES, J., AND MESEGUER, F. **Sound attenuation by sculpture**. *Nature 378* (1995), 241.

**[16]** KUHLMANN, H., AND RATH, H. **Free Surface Flows**. CISM International Centre for Mechanical Sciences. Springer Vienna, 1998.

**[17]** CABALLERO, D., SANCHEZ-DEHESA, J., RUBIO, C., MARTINEZ-SALA, R., SANCHEZ-PEREZ, J. V., MESEGUER, F., AND LLINARES, J. **Large two-dimensional sonic band gaps**. *Phys. Rev. E 60*, 6 (1999), R6316–R6319.

**[18]** BATCHELOR, C. K., AND BATCHELOR, G. **An introduction to fluid dynamics**. Cambridge university press, 2000.

**[19]** LIU, Z., ZHANG, X., MAO, Y., ZHU, Y. Y., YANG, Z., CHAN, C. T., AND SHENG, P. **Locally resonant sonic materials**. *Science 289*, 5485 (2000), 1734–1736.

**[20]** OHGUSHI, K., MURAKAMI, S., AND NAGAOSA, N. **Spin anisotropy and quantum Hall effect in the kagomé lattice : Chiral spin state based on a ferromagnet**. *Phys. Rev. B 62* (2000), R6065.

**[21]** MILTON, G. W. **The Theory of Composites**. Cambridge University Press, 2002.

**[22]** HU, X., SHEN, Y., LIU, X., FU, R., ZI, J., JIANG, X., AND FENG, S. **Band structures and band gaps of liquid surface waves propagating through an infinite array of cylinders**. *Phys. Rev. E 68* (2003), 037301.

**[23]** HU, X., SHEN, Y., LIU, X., FU, R., AND ZI, J. **Superlensing effect in liquid surface waves**. *Phys. Rev. E 69* (2004), 030201.

**[24]** JEONG, T. S., KIM, J.-E., PARK, H. Y., AND LEE, I.-W. **Experimental measurement of water wave band gaps**. *Appl. Phys. Lett. 85* (2004), 1645.

**[25]** KHELIF, A., CHOUJAA, A., BENCHABANE, S., DJAFARI-ROUHANI, B., AND LAUDE, V. **Guiding and bending of acoustic waves in highly confined phononic crystal waveguides**. *Appl. Phys. Lett. 84*, 22 (2004), 4400–4402.

**[26]** LI, J., AND CHAN, C. T. **Double-negative acoustic metamaterial**. *Phys. Rev. E 70* (2004), 055602.

**[27]** DOLLING, G., ENKRICH, C., WEGENER, M., SOUKOULIS, C. M., AND LINDEN, S. **Simultaneous negative phase and group velocity of light in a metamaterial**. *Science 312*, 5775 (2006), 892–894.

**[28]** GREENLEAF, A., KURYLEV, Y., LASSAS, M., AND UHLMANN, G. **Full-wave invisibility of active devices at all frequencies**. *Communications in Mathematical Physics 275*, 3 (2007), 749–789.

**[29]** LARABI, H., PENNEC, Y., DJAFARI-ROUHANI, B., AND VASSEUR, J. O. **Multicoaxial cylindrical inclusions in locally resonant phononic crystals**. *Phys. Rev. E 75* (2007), 066601.

**[30]** SOUKOULIS, C. M., LINDEN, S., AND WEGENER, M. **Negative refractive index at optical wavelengths**. *Science 315*, 5808 (2007), 47–49.

**[31]** VASSEUR, J. O., HLADKY-HENNION, A.-C., DJAFARI-ROUHANI, B., DUVAL, F., DUBUS, B., PENNEC, Y., AND DEYMIER, P. A. **Waveguiding in two-dimensional piezoelectric phononic crystal plates**. *J. Appl. Phys. 101*, 11 (2007), 114904.

**[32]** XIAO, D., YAO, W., AND QIAN NIU. **Valley-Contrasting Physics in Graphene : Magnetic Moment and Topological Transport**. *Phys. Rev. Lett. 99*, 23 (Dec. 2007), 236809.

**[33]** CHATTERJEE, S. K. **Crystallography and the World of Symmetry**, vol. 113. Springer Science & Business Media, 2008.

**[34]** CHENG, Y., YANG, F., XU, J. Y., AND LIU, X. J. **A multilayer structured acoustic cloak with homogeneous isotropic materials**. *Applied Physics Letters 92*, 15 (2008), 151913.

**[35]** LI, J., AND PENDRY, J. B. **Hiding under the carpet : A new strategy for cloaking**. *Phys. Rev. Lett. 101* (2008), 203901.

**[36]** WANG, Z., CHONG, Y. D., JOANNOPOULOS, J. D., AND SOLJAČIĆ, M. **Reflection-free one-way edge modes in a gyromagnetic photonic crystal**. *Phys. Rev. Lett. 100* (2008), 013905.

**[37]** COBELLI, P. J., MAUREL, A., PAGNEUX, V., AND PETITJEANS, P. **Global measurement of water waves by fourier transform profilometry**. *Exp. Fluids 46*, 6 (2009), 1037–1047.

**[38]** MAUREL, A., COBELLI, P., PAGNEUX, V., AND PETITJEANS, P. **Experimental and theoretical inspection of the phase-to-height relation in fourier transform profilometry**. *Appl. Opt. 48*, 2 (2009), 380–392.

**[39]** MOISY, F., RABAUD, M., AND SALSAC, K. **A synthetic schlieren method for the measurement of the topography of a liquid interface**. *Exp. Fluids 46*, 6 (2009), 1021–1036.

**[40]** VALENTINE, J., LI, J., ZENTGRAF, T., BARTAL, G., AND ZHANG, X. **An optical cloak made of dielectrics**. *Nat. Mater. 8*, 7 (2009), 568–571.

**[41]** ERGIN, T., STENGER, N., BRENNER, P., PENDRY, J. B., AND WEGENER, M. **Three-dimensional invisibility cloak at optical wavelengths**. *Science 328* (2010), 337–339.

**[42]** OUDICH, M., ASSOUAR, M. B., AND HOU, Z. **Propagation of acoustic waves and waveguiding in a two-dimensional locally resonant phononic crystal plate**. *Appl. Phys. Lett. 97*, 19 (2010), 193503.

**[43]** SANCHEZ-DEHESA, J., AND TORRENT, D. **Acoustic metamaterials based on phononic crystals.** *J. Acoust. Soc. Am. 128*, 4 (2010), 2427–2427.

**[44]** BANERJEE, B. **An Introduction to Metamaterials and Waves in Composites**. Taylor and Francis, 2011.

**[45]** CPBELLI, P. J., PAGNEUX, V., MAUREL, A., AND PETITJEANS, P. **Experimental study on water-wave trapped modes**. *J. Fluid Mech. 666* (2011), 445–476.

**[46]** DELPLACE, P., ULLMO, D., AND MONTAMBAUX, G. **Zak phase and the existence of edge states in graphene**. *Phys. Rev. B 84* (2011), 195452.

**[47]** DJAFARI-ROUHANI, B., PENNEC, Y., EL BOUDOUTI, E., VASSEUR, J., EL HASSOUANI, Y., LI, C., AKJOUJ, A., AND BRIA, D. **Band gap engineering in simultaneous phononic and photonic crystal slabs**. *Applied Physics A 103*, 3 (2011), 735–739.

**[48]** DUPONT, G., FARHAT, M., DIATTA, A., GUENNEAU, S., AND ENOCH, S. **Numerical analysis of three-dimensional acoustic cloaks and carpets**. *Wave Motion 48*, 6 (2011), 483–496.

**[49]** STRÖBEL, B. **Demonstration and study of the dispersion of water waves with a computer-controlled ripple tank**. *Am. J. Phys. 79*, 6 (2011), 581–590.

**[50]** CRASTER, R. V., AND GUENNEAU, S. **Acoustic metamaterials : Negative refraction, imaging, lensing and cloaking**, vol. 166. Springer Science & Business Media, 2012.

**[51]** KHANIKAEV, A. B., HOSSEIN, M. S., TSE, W.-K., KARGARIAN, M., MACDONALD, A. H., AND SHVETS, G. **Photonic topological insulators**. *Nat. Mater. 12* (2012), 223.

**[52]** OCHIAI, T. **Photonic realization of the (2+1)-dimensional parity anomaly**. *Phys. Rev. B 86* (2012), 075152.

**[53]** PRINCE, E. **Mathematical techniques in crystallography and materials science**. Springer Science & Business Media, 2012.

**[54]** TORRENT, D., AND SÁNCHEZ-DEHESA, J. **Acoustic analogue of graphene : Observation of dirac cones in acoustic surface waves**. *Phys. Rev. Lett. 108* (2012), 174301.

**[55]** VIAL, B., ZOLLA, F., NICOLET, A., COMMANDRÉ, M., AND TISSERAND, S. **Adaptive perfectly matched layer for wood's anomalies in diffraction gratings**. *Opt. Express 20*, 27 (2012), 28094–28105.

**[56]** BERRAQUERO, C. P., MAUREL, A., PETITJEANS, P., AND PAGNEUX, V. **Experimental realization of a water-wave metamaterial shifter**. *Phys. Rev. E 88* (2013), 051002.

**[57]** FRENZEL, T., DAVID BREHM, J., BÜCKMANN, T., SCHITTNY, R., KADIC, M., AND WEGENER, M. **Three-dimensional labyrinthine acoustic metamaterials**. *Appl. Phys. Lett. 103*, 6 (2013), 061907.

**[58]** HAFEZI, M., MITTAL, S., FAN, J., MIGDALL, A., AND TAYLOR, J. M. **Imaging topological edge states in silicon photonics**. *Nat. Photon. 7* (2013), 1001.

**[59]** ROMERO-GARCÍA, V., LAGARRIGUE, C., GROBY, J.-P., RICHOUX, O., AND TOURNAT, V. **Tunable acoustic waveguides in periodic arrays made of rigid square-rod scatterers : theory and experimental realization**. *Journal of Physics D : Applied Physics 46*, 30 (2013), 305108.

**[60]** HAFEZI, M. **Measuring topological invariants in photonic systems**. *Phys. Rev. Lett. 112* (2014), 210405.

**[61]** LU, L., JOANNOPOULOS, J. D., AND SOLJAČIĆ, M. **Topological photonics**. *Nat. Photon. 8* (2014), 821.

**[62]** OUDICH, M., DJAFARI-ROUHANI, B., PENNEC, Y., ASSOUAR, M. B., AND BONELLO, B. **Negative effective mass density of acoustic metamaterial plate decorated with low frequency resonant pillars**. *Journal of Applied Physics 116*, 18 (2014), 184504.

**[63]** BENCHABANE, S., GAIFFE, O., SALUT, R., ULLIAC, G., LAUDE, V., AND KOKKONEN, K. **Guidance of surface waves in a micron-scale phononic crystal line-defect waveguide**. *Appl. Phys. Lett. 106*, 8 (2015), 081903.

**[64]** BÜCKMANN, T., KADIC, M., SCHITTNY, R., AND WEGENER, M. **Mechanical cloak design by direct lattice transformation**. *Proc. Nat. Acad. Sci. 112* (2015), 4930–4934.

**[65]** DUPONT, G., KIMMOUN, O., MOLIN, B., GUENNEAU, S., AND ENOCH, S. **Numerical and experimental study of an invisibility carpet in a water channel**. *Phys. Rev. E 91* (2015), 023010.

**[66]** KHANIKAEV, A. B., FLEURY, R., MOUSAVI, S. H., AND ALU, A. **Experimental demonstration of anomalous Floquet topological insulator for sound**. *Nat. Commun. 6* (2015), 8260.

**[67]** KHANIKAEV, A. B., FLEURY, R., MOUSAVI, S. H., AND ALU, A. **Topologically robust sound propagation in an angular-momentum-biased graphene-like resonator lattice**. *Nature communications 6*, 1 (2015), 1–7.

**[68]** KHELIF, A., AND ADIBI, A. **Phononic crystals**. Springer, 2015.

**[69]** LAUDE, V. **Phononic crystals : Artificial Crystals for Sonic, Acoustic, and Elastic Waves**. DeGruyter, Berlin/Boston, 2015.

**[70]** NASH, L. M., KLECKNER, D., READ, A., VITELLI, V., TURNER, A. M., AND IRVINE, W. T. M. **Topological mechanics of gyroscopic metamaterials**. *Proc. Nat. Acad. Sci. 112*, 47 (2015), 14495.

**[71]** SILVEIRINHA, M. G. **Chern invariants for continuous media**. *Phys. Rev. B 92* (2015), 125153.

**[72]** SÜSSTRUNK, R., AND HUBER, S. D. **Observation of phononic helical edge states in a mechanical topological insulator**. *Science 349* (2015), 47.

**[73]** TORRENT, D., PENNEC, Y., AND DJAFARI-ROUHANI, B. **Resonant and nonlocal properties of phononic metasolids**. *Phys. Rev. B 92* (2015), 174110.

**[74]** YANG, Z., GAO, F., SHI, X., LIN, X., GAO, Z., CHONG, Y., AND ZHANG, B. **Topological acoustics**. *Phys. Rev. Lett. 114* (2015), 114301.

**[75]** ASBÓTH, J. K., OROSZLÁNY, L., AND PÁLYI, A. **A short course on topological insulators**. *Lect. Notes Phys. 919* (2016), 997–1000.

**[76]** FEFFERMAN, C. L., LEE-THORP, J. P., AND WEINSTEIN, M. I. **Bifurcations of edge states—topologically protected and non-protected—in continuous 2d honeycomb structures**. *2D Mater. 3* (2016), 014008.

**[77]** GAO, F., GAO, Z., SHI, X., YANG, Z., LIN, X., XU, H., JOANNOPOULOS, J. D., SOLJAČIĆ, M., CHEN, H., LU, L., CHONG, Y., AND ZHANG, B. **Probing topological protection using a designer surface plasmon structure**. *Nat. Commun. 7* (2016), 11619.

**[78]** JIN, Y., PENNEC, Y., PAN, Y., AND DJAFARI-ROUHANI, B. **Phononic crystal plate with hollow pillars connected by thin bars**. *Journal of Physics D : Applied Physics 50*, 3 (2016), 035301.

**[79]** LU, J., QIU, C., KE, M., AND LIU, Z. **Valley vortex states in sonic crystals**. *Phys. Rev. Lett. 116*, 9 (2016), 093901.

**[80]** PENG, Y.-G., QIN, C.-Z., ZHAO, D.-G., YA-XI, S., XU, X.-Y., BAO, M., JIA, H., AND ZHU, X.-F. **Experimental demonstration of anomalous Floquet topological insulator for sound**. *Nat. Commun. 7* (2016), 13368.

**[81]** PRODAN, E., AND SCHULZ-BALDES, H. **Bulk and boundary invariants for complex topological insulators**. *K* (2016).

**[82]** SÜSSTRUNK, R., AND HUBER, S. D. **Classification of topological phonons in linear mechanical metamaterials**. *Proc. Nat. Acad. Sci. 113* (2016), E4767–E4775.

**[83]** YANG, Z., GAO, F., AND ZHANG, B. **Topological water wave states in a one-dimensional structure**. *Scientific Reports 6*, 1 (Sept. 2016).

**[84]** DEYMIER, P., AND RUNGE, K. **Sound topology, duality, coherence and wave-mixing : an introduction to the emerging new science of sound**, vol. 188. Springer, 2017.

**[85]** HUBER, S. D. **Topological mechanics**. *Nat. Phys. 12* (2017), 621.

**[86]** LU, J., QIU, C., YE, L., FAN, X., KE, M., ZHANG, F., AND LIU, Z. **Observation of topological valley transport of sound in sonic crystals**. *Nat. Phys. 13* (2017), 369.

**[87]** PAL, R. K., AND RUZZENE, M. **Edge waves in plates with resonators : an elastic analogue of the quantum valley hall effect**. *New J. Phys. 19*, 2 (2017), 025001.

**[88]** VILA, J., PAL, R. K., AND RUZZENE, M. **Observation of topological valley modes in an elastic hexagonal lattice**. *Phys. Rev. B 96* (2017), 134307.

**[89]** XIAO, Y.-X., MA, G., ZHANG, Z.-Q., AND CHAN, C. T. **Topological subspace-induced bound state in the continuum**. *Phys. Rev. Lett. 118* (2017), 166803.

**[90]** BOBINSKI, T., MAUREL, A., PETITJEANS, P., AND PAGNEUX, V. **Backscattering reduction for resonating obstacle in water-wave channel**. *J. Fluid Mech 845* (2018), R4.

**[91]** COBELLI, P. J., PETITJEANS, P., MAUREL, A., AND PAGNEUX, V. **Determination of the bottom deformation from space-and time-resolved water wave measurements**. *J. Fluid Mech. 835* (2018), 301.

**[92]** KALOZOUMIS, P. A., THEOCHARIS, G., ACHILLEOS, V., FÉLIX, S., RICHOUX, O., AND PAGNEUX, V. **Finite-size effects on topological interface states in one-dimensional scattering systems**. *Phys. Rev. A 98* (2018), 023838.

**[93]** LAUDE, V., AND KOROTYAEVA, M. E. **Stochastic excitation method for calculating the resolvent band structure of periodic media and waveguides**. *Phys. Rev. B 97* (2018), 224110.

**[94]** QIAN, K., APIGO, D. J., PRODAN, C., BARLAS, Y., AND PRODAN, E. **Theory and Experimental Investigation of the Quantum Valley Hall Effect**. *arXiv :1803.08781 [cond-mat]* (Mar. 2018).

**[95]** WU, S., WU, Y., AND MEI, J. **Topological helical edge states in water waves over a topographical bottom**. *New J. Phys. 20*, 2 (Feb. 2018), 023051.

**[96]** KADIC, M., MILTON, G. W., VAN HECKE, M., AND WEGENER, M. **3d metamaterials**. *Nat. Rev. Phys.* (2019), 1.

**[97]** LAFORGE, N., LAUDE, V., CHOLLET, F., KHELIF, A., KADIC, M., GUO, Y., AND FLEURY, R. **Observation of topological gravity-capillary waves in a water wave crystal**. *New J. Phy. 21* (2019), 083031.

**[98]** MAKWANA, M. P., AND CHAPLAIN, G. **Tunable three-way topological energy-splitter**. *Sci. Rep. 9*, 1 (2019), 18939.

**[99]** MONSALVE, E., MAUREL, A., PETITJEANS, P., AND PAGNEUX, V. **Perfect absorption of water waves by linear or nonlinear critical coupling**. *Appl. Phys. Lett. 114*, 1 (2019), 013901.

**[100]** SHEN, Y., QIU, C., CAI, X., YE, L., LU, J., KE, M., AND LIU, Z. **Valley-projected edge modes observed in underwater sonic crystals**. *Appl. Phys. Lett. 114* (2019), 023501.

**[101]** WANG, W., BONELLO, B., DJAFARI-ROUHANI, B., AND PENNEC, Y. **Topological valley, pseudospin, and pseudospin-valley protected edge states in symmetric pillared phononic crystals**. *Phys. Rev. B 100* (2019), 140101.

**[102]** COUTANT, A., ACHILLEOS, V., RICHOUX, O., THEOCHARIS, G., AND PAGNEUX, V. **Topological two-dimensional su-schrieffer-heeger analogue acoustic networks : Total reflection at corners and corner induced modes**, 2020.

**[103]** HOFFMANN, F. **Introduction to Crystallography**. Springer Nature, 2020.

**[104]** LAFORGE, N., WILTSHAW, R., CRASTER, R. V., LAUDE, V., MARTÍNEZ, J. A. I., DUPONT, G., GUENNEAU, S., KADIC, M., AND MAKWANA, M. P. **Acoustic topological circuitry in square and rectangular phononic crystals**. *arXiv :2012.08014* (2020).

**[105]** MAKWANA, M. P., LAFORGE, N., CRASTER, R. V., DUPONT, G., GUENNEAU, S., LAUDE, V., AND KADIC, M. **Experimental observations of topologically guided water waves within non-hexagonal structures**. *Appl. Phys. Lett. 116*, 13 (2020), 131603.

**[106]** WANG, Y.-F., ZHANG, S.-Y., WANG, Y.-S., AND LAUDE, V. **Hybridization of resonant modes and Bloch waves in acoustoelastic phononic crystals**. *Phys. Rev. B 102*, 14 (2020), 144303.

Document réalisé avec LaTeX et :
le style LaTeX pour Thèse de Doctorat créé par S. Galland — http://www.multiagent.fr/ThesisStyle
la collection de paquets `tex-upmethodology` — http://www.arakhne.org/tex-upmethodology/

SPIM
école doctorale **sciences pour l'ingénieur et microtechniques**

**Titre :** Guides d'onde phononiques topologiques

**Mots-clés :** Ondes, Topologie, Acoustique, Ondes de surface, Metamatériaux, Cristaux phononiques

**Résumé :**

Les métamatériaux correspondent à l'ensemble des matériaux conçus par l'Homme présentant des propriétés, statiques ou dynamiques, inaccessibles aux matériaux naturels. Parmi eux, les cristaux phononiques consistent en un assemblage périodique de deux matériaux ou plus, et sont utilisés principalement pour la conception de dispositifs de filtrage et de guidage d'ondes. Au cours de la décennie 2010, un nouveau mécanisme permettant le guidage d'ondes a commencé à être utilisé. Il s'agit de la topologie, qui s'appuie sur la création d'une interface issue de la juxtaposition de deux cristaux présentant des propriétés de symétries chirales. Si ce mécanisme a prouvé son efficacité dans un grand nombre d'applications, il n'a en revanche jamais été utilisé dans un milieu fortement dispersif, ou pour un cristal présentant une géométrie n'étant pas similaire à la géométrie hexagonale du graphène. L'objectif de cette thèse est donc de concevoir de tels cristaux phononiques topologiques. Dans un premier temps, nous avons conçu un cristal phononique présentant un comportement topologique pour des ondes de surface sur l'eau en reprenant une géométrie présentant un comportement topologique pour des ondes acoustiques guidées dans l'air. Cette similarité est permise par la forme des équations régissant ces deux domaines, ce qui nous permet de transposer des comportements topologiques d'un domaine physique à un autre. Nous avons ensuite conçu un cristal phononique topologique ne reposant pas sur la géométrie du graphène, toujours pour des ondes de surface dans l'eau. Cette géométrie permet la conception d'un dispositif séparateur d'ondes à trois voies. Si nous avons mis en évidence le comportement topologique de ce cristal, nous n'avons pas confirmé la possibilité de séparer une onde dans trois directions. En reprenant cette géométrie, mais pour des ondes acoustiques dans l'eau, nous avons mis cette fois en évidence la possibilité de séparer une onde dans trois directions. Cette observation ouvre la voie à la conception de nouveaux circuits de guidage d'onde.

**Title:** Topological phononic crystal waveguides

**Keywords:** Waves, Topology, Acoustics, Surface waves, Metamaterials, Phononic crystals

**Abstract:**

Metamaterials are materials designed by man with static or dynamic properties inaccessible to natural materials. Among them, phononic crystals consist of a periodic assembly of two or more materials, and are mainly used for the design of waveguiding and filtering devices. During the past decade, a new mechanism allowing waveguiding started to be used. It is based on topology, more precisely on the creation of an interface resulting from the juxtaposition of two crystals with chiral symmetry properties. While this mechanism has proven its effectiveness in a large number of applications, it has never been used in a highly dispersive medium, or for a crystal having a geometry not similar to that of graphene. The objective of this thesis is to design such topological phononic crystals. First, we designed a phononic crystal exhibiting topological behavior for surface water waves by using a geometry exhibiting the same topological behavior as for acoustic waves in air. This similarity is allowed by the form of the equations governing these two domains, which allows us to transpose topological behaviors from one physical domain to another. We then designed a topological phononic crystal that did not rely on the geometry of graphene, still for surface water waves. This geometry allows for the design of a three-way wave splitter device. While we have demonstrated the topological behavior of this crystal, we have not confirmed the possibility of splitting a wave in three directions. Using such a geometry, but for underwater acoustic waves, we highlighted the possibility of separating a wave in three directions. This observation paves the way for the design of new waveguiding circuits.

UBFC UNIVERSITÉ BOURGOGNE FRANCHE-COMTÉ
Université Bourgogne Franche-Comté
32, avenue de l'Observatoire
25000 Besançon, France