

# ФОРМА ЛИНИИ СУБДОПЛЕРОВСКИХ РЕЗОНАНСОВ В ГАЗЕ АТОМОВ ЩЕЛОЧНЫХ МЕТАЛЛОВ В ПОЛЕ ВСТРЕЧНЫХ БИХРОМАТИЧЕСКИХ ЛАЗЕРНЫХ ПУЧКОВ

А. М. Михайлов <sup>a,b</sup>, Р. Будо <sup>c</sup>, Д. В. Бражников <sup>a,b\*</sup>

<sup>a</sup> *Институт лазерной физики СО РАН  
630090, Новосибирск, Россия*

<sup>b</sup> *Новосибирский государственный университет  
630090, Новосибирск, Россия*

<sup>c</sup> *FEMTO-ST, CNRS, Université de Bourgogne Franche-Comté  
25030, Besançon, France*

Высококонтрастные субдоплеровские резонансы, наблюдаемые в парах атомов щелочных металлов в поле встречных бихроматических лазерных пучков, имеют хорошие перспективы в квантовой метрологии для создания миниатюрного оптического стандарта частоты. До настоящего времени эти нелинейные резонансы были изучены только экспериментально или с использованием численных расчетов. Для дальнейшего развития теории наблюдаемых резонансов крайне важным представляется разработка упрощенной теоретической модели, позволяющей получить явные и компактные аналитические выражения для формы резонансной линии. В настоящей работе проведен такой теоретический анализ на основе трехуровневой  $\Lambda$ -схемы атома. При этом исследованы два режима: режим слабой стоячей волны с близкими интенсивностями встречных пучков ( $I_1 \approx I_2$ ) и режим пробной волны, в котором один из пучков имеет интенсивность заметно меньшую интенсивности встречного пучка ( $I_2 \ll I_1$ ). Полученные аналитические выражения позволяют установить качественные различия между этими режимами, а также явным образом выделить вклады от различных нелинейных эффектов в поглощение светового поля, в том числе слагаемые, ответственные за образование высококонтрастного субдоплеровского пика. Полученные выражения находятся в качественном согласии с ранее полученными экспериментальными данными.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Лазерная спектроскопия играет важнейшую роль в развитии физики, позволяя изучать строение атомов, молекул и их взаимодействия [1], выполнять прецизионные измерения эффектов квантовой теории поля [2,3], специальной и общей теории относительности [4–6]. Один из основных методов лазерной спектроскопии – метод насыщенного поглощения в газе атомов или молекул [1,7]. Резонансы насыщенного поглощения (РНП) свободные от доплеровского уширения (субдоплеровские резонансы) активно используются в лабораториях для проведения различных экспериментов, в которых необходимо осуществлять стабилизацию частоты лазерного излучения. На основе РНП создаются некоторые транспортируемые квантовые стандарты частоты

(КСЧ) оптического диапазона с использованием молекулярных [8–11] или атомарных газов [12,13]. Некоторые из таких стандартов применяются в космических научных миссиях [14,15].

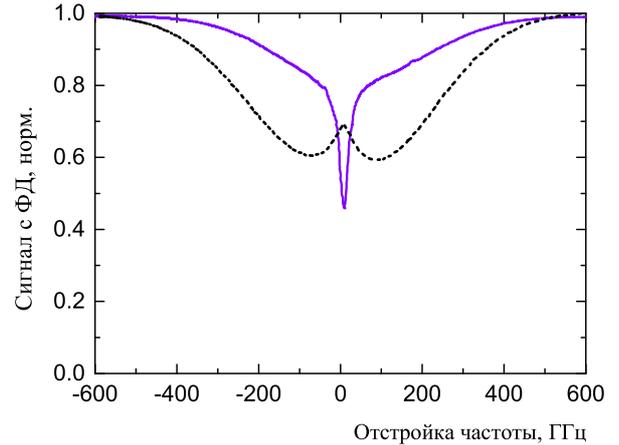
До недавнего времени наиболее компактные (миниатюрные) образцы КСЧ разрабатывались лишь для микроволнового диапазона. В таких устройствах частота СВЧ генератора, порядка нескольких ГГц, стабилизируется по резонансам когерентного пленения населенностей (КПН) [16] в парах щелочных металлов (Rb или Cs). Современные образцы таких КСЧ используют газовые ячейки с объемом  $V \ll 1$  см<sup>3</sup>, при этом общий объем устройства обычно составляет менее 70 см<sup>3</sup> [17–19]. Относительная стабильность частоты (девиация Аллана) КСЧ-КПН лежит в диапазоне  $\sigma_y \sim 10^{-11} - 10^{-10}$  за 1 с усреднения. Такие миниатюрные микроволновые стандарты чрезвычайно востребованы для развития многих

\* E-mail: brazhnikov@laser.nsc.ru

современных технологий, в том числе связанных с использованием малых спутников: мониторинг ионосферы Земли [20], спутниковая навигация и связь, в том числе для дальнего космоса [21].

Создание миниатюрных КСЧ оптического диапазона представляет собой весьма сложную задачу. Поэтому долгое время не существовало соответствующих разработок, сравнимых по характеристикам с микроволновыми аналогами. Одна из причин заключается в том, что отношение сигнал/шум, определяющее кратковременную стабильность частоты, не достигало приемлемого уровня при использовании миниатюрных газовых ячеек. Действительно, наиболее компактные КСЧ оптического диапазона были основаны на РНП в ячейках с объемом, равным нескольким см<sup>3</sup> или значительно большем. Например, в работах [11,14,15] длина ячеек с молекулярным йодом составляла от 10 до 30 см. Заметный прогресс в развитии миниатюрных КСЧ оптического диапазона произошел лишь в последние несколько лет с появлением серии работ группы ученых из NIST (г. Болдер) и других организаций США [22–24]. В них было предложено использовать микроячейку ( $V \approx 10$  мм<sup>3</sup>), наполненную парами атомов <sup>87</sup>Rb, и метод двухфотонной спектроскопии для получения реперного резонанса, необходимого для стабилизации оптической частоты. Полный объем КСЧ составил всего 35 см<sup>3</sup> [24], что сравнимо с миниатюрными образцами микроволновых КСЧ. Важно отметить, что активные работы в этом направлении на протяжении нескольких лет приводили к постоянному улучшению стабильности частоты оптических КСЧ с  $\sigma_y \approx 10^{-11}$  за 1 с в одной из первых работ [22] до  $\approx 2 \times 10^{-13}$  в недавней работе [25].

В работе [26] был предложен альтернативный подход к созданию миниатюрных оптических КСЧ. В его основе лежит субдоплеровская спектроскопия атомов цезия в поле встречных бихроматических лазерных пучков с ортогональными линейными поляризациями. Этот метод весьма близок к стандартному методу насыщенного поглощения. Основное отличие состоит в том, что каждый из встречных пучков содержит две спектральные компоненты с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , так что их разность совпадает с частотой сверхтонкого расщепления  $\omega_{hfs}$  основного состояния в атоме ( $\approx 2\pi \times 9.2$  ГГц для <sup>133</sup>Cs). В этих условиях, как было впервые обнаружено в экспериментальной работе [27], при сканировании частоты лазера наблюдается субдоплеровский резонанс с необычно



**Рис. 1.** Резонансное поглощение светового поля парами атомов Cs, наблюдаемое на фотодетекторе в обычном одночастотном (штрих.) и в двухчастотном (сплош.) режимах. В одночастотном режиме возбуждается переход  $F_g = 3 \rightarrow F_e = 4$  в D<sub>1</sub> линии,  $T_{cell} \approx 60^\circ\text{C}$ . В двухчастотном режиме одновременно возбуждаются переходы  $F_g = 3, 4 \rightarrow F_e = 4$ ,  $T_{cell} \approx 45^\circ\text{C}$ . Суммарная оптическая мощность в ячейке  $P_{tot} \approx 1.1$  мВт при диаметре пучков  $\approx 2$  мм. Сигналы нормированы на постоянное значение, пропорциональное интенсивности света на входе в ячейку.

большим контрастом, а значение отношения амплитуда/ширина более чем на порядок превосходит аналогичное значение для резонансов, наблюдаемых в стандартном одночастотном методе насыщенного поглощения. Примеры резонансов, полученные в наших недавних экспериментах с миниатюрной кубической стеклянной ячейкой (объем для спектроскопии  $V \approx 125$  мм<sup>3</sup>) представлены на рис. 1 [28]. Из рисунка следует, что при использовании двухчастотного метода наблюдается более узкий субдоплеровский резонанс в виде провала в проходящей через ячейку интенсивности света по сравнению с аналогичным резонансом в стандартной одночастотной схеме, в которой наблюдается обычный РНП в виде пика пропускания. Кроме того, этот высококонтрастный провал имеет более высокую амплитуду, чем РНП. Эти особенности крайне важны для приложений новых нелинейных резонансов к решению задач квантовой метрологии, в частности, для создания миниатюрного КСЧ оптического диапазона. Так, в первых же экспериментах с использованием цезиевой микроячейки ( $V \approx 5$  мм<sup>3</sup>) была достигнута стабильность оптической частоты, равная  $2 \times 10^{-12}$  за 1 с [26]. Важно отметить, что кроме высокой

стабильности частоты предложенная двухчастотная техника демонстрирует хорошие результаты при относительно малой температуре паров:  $\approx 60^\circ\text{C}$  для двухчастотной спектроскопии Cs против  $80\text{--}100^\circ\text{C}$  для двухфотонной спектроскопии Rb [24,25]. Это обстоятельство означает потенциально более низкое энергопотребление всего КСЧ.

Описанный новый метод двухчастотной спектроскопии уже успешно используется для стабилизации оптической частоты лазера в схеме высокостабильных микроволновых КСЧ на основе резонансов КПН [29,30]. Кроме того, недавно этот метод был опробована и на атомах рубидия для создания КСЧ оптического диапазона [31]. Однако, несмотря на эти успехи и еще большие перспективы, теория наблюдаемых высококонтрастных нелинейных резонансов имеет свои пробелы. В частности, качественное описание наблюдаемых эффектов, а также численные расчеты в модели трехуровневой  $\Lambda$ -схемы были представлены в работах [27,32,33]. Численные расчеты, учитывающие реальную структуру уровней энергии в атоме цезия, были проведены в работе [26]. В этих работах была показана ключевая роль явления КПН в наблюдении высококонтрастных субдоплеровских резонансов. Между тем, до сих пор не было представлено никаких аналитических выражений для формы линии наблюдаемых резонансов в газе атомов, которые бы явно демонстрировали возможность наблюдения резонанса в виде субдоплеровского пика в поглощении среды.

В настоящей работе нами представлена упрощенная спектроскопическая модель на основе трехуровневой  $\Lambda$ -схемы атома, позволяющая получить явные аналитические выражения, адекватно описывающие экспериментально наблюдаемые резонансы. Модель демонстрирует взаимное влияние таких нелинейных эффектов, как самонасыщение среды от каждого из двух лазерных пучков, насыщенное поглощение от взаимного действия встречных пучков, а также два типа нелинейных эффектов, связанных с КПН: просветление среды вдали от центра резонансной кривой и взаимная “конкуренция” разных КПН-состояний в центре этой кривой, которая и отвечает за наблюдение высококонтрастных субдоплеровских резонансов.

## 2. ТЕОРИЯ

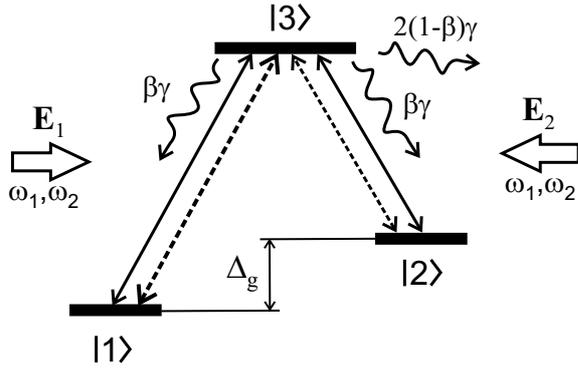
### 2.1. Модель на основе $\Lambda$ -схемы

В экспериментах с двухчастотной спектроскопией для наблюдения высококонтрастных субдоплеровских резонансов атомы цезия облучались встречными лазерными пучками, каждый из которых состоит, как минимум, из двух спектральных компонент с частотами  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и соответствующими волновыми числами  $k_1$ ,  $k_2$  ( $k_j = \omega_j/c$ , где  $c$  – скорость света). Для упрощения теории мы рассмотрим случай, когда две спектральные компоненты излучения в каждом из пучков имеют равные амплитуды. Тогда световое поле может быть представлено в виде:

$$E(z, t) = E_1 [e^{-i(\omega_1 t - k_1 z)} + e^{-i(\omega_2 t - k_2 z)}] + E_2 [e^{-i(\omega_1 t + k_1 z - \alpha + \phi_1)} + e^{-i(\omega_2 t + k_2 z + \alpha + \phi_2)}] + c.c. \quad (1)$$

Здесь  $E_1$  – вещественная амплитуда волн, бегущих по оси  $z$  (оси квантования), а  $E_2$  – для волн, бегущих против этой оси. Для упрощения, интенсивность лазерного поля мы считаем однородной по поперечному сечению пучков (П-образный профиль), т.е. амплитуды волн не зависят от поперечных координат  $x$  и  $y$ . Учет гауссового распределения интенсивности, как правило, приводит лишь к незначительным изменениям субдоплеровского резонанса (см., например, [34]). “*c.c.*” означает комплексно сопряженные слагаемые. В (1) введены фазы  $\phi_1$  и  $\phi_2$ , чтобы учесть возможную разность фаз между волнами бегущими по оси  $z$  и против нее. Как мы увидим далее, наблюдаемые резонансы чувствительны не к этим фазам по отдельности, а к их разности  $\phi_1 - \phi_2$ . Эта разность может контролироваться в эксперименте, например, посредством перемещения зеркала, формирующего встречный световой пучок [26,32,33].

Как и в работе [32], всю совокупность уровней энергии в реальном атоме мы будем моделировать трехуровневой  $\Lambda$ -схемой, изображенной на рис. 2. Расстояние  $\Delta_g$  между подуровнями энергии основного состояния,  $|1\rangle$  и  $|2\rangle$ , соответствует величине сверхтонкого расщепления. При этом частотная компонента поля  $\omega_1$  вызывает дипольные переходы  $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ , тогда как компонента  $\omega_2$  – переходы  $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ . Отметим, что  $\Lambda$ -схема уровней энергии часто используется в теории при рассмотрении широкого круга задач из области лазерной спектроскопии атомов (см., например, [35–37]), динамики распространения импульсов



**Рис. 2.**  $\Lambda$ -схема уровней энергии в атоме. Сплошными стрелками обозначены переходы, индуцируемые двухчастотным пучком  $\mathbf{E}_1$ , распространяющимся вдоль оси  $z$ . Штриховые стрелки – переходы, индуцируемые встречным двухчастотным пучком  $\mathbf{E}_2$ . Волнистые стрелки обозначают каналы спонтанной релаксации. Пролетная релаксация не показана.

света в резонансных средах [38–40] и иных задач, связанных с явлением КПП.

Для наблюдения высококонтрастных субдоплеровских резонансов в [26,27] использовались встречные пучки с взаимно ортогональными линейными поляризациями. Несмотря на то, что поле (1) записано в скалярном виде, в нашей модели векторную природу света можно учесть введением в (1) фазы  $\pm\alpha$ , которая соответствует углу между линейными поляризациями встречных пучков (см. также [32]). При необходимости на основе  $\Lambda$ -схемы могут быть рассмотрены и эллиптически поляризованные волны (см., например, [41]).

Теоретический анализ будем проводить на основе стандартного квазиклассического формализма одноатомной матрицы плотности  $\hat{\rho}$ , когда внутренние степени свободы атома описываются квантово-механическим образом, тогда как световое поле считается классическим (не квантуется) [1,42]. Соответствующее уравнение движения имеет линдбладовский вид:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [(\hat{H}_0 + \hat{V}), \hat{\rho}] + \hat{\mathcal{R}}\{\hat{\rho}\}. \quad (2)$$

Здесь  $d/dt = \partial/\partial t + v\partial/\partial z$ , где  $v$  – проекция скорости атома на ось квантования  $z$ . Гамильтониан  $\hat{H}_0$  описывает невозмущенное состояние атома (в отсутствии лазерного поля). В базисе собственных функций он имеет диагональный вид:

$$\hat{H}_0 = \sum_{n=1}^3 \mathcal{E}_n |n\rangle\langle n|, \quad (3)$$

где  $\mathcal{E}_n$  – энергия уровня  $|n\rangle$  в атоме (см. рис. 2), так что  $\omega_{mn} = (\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_n)/\hbar$  есть частоты соответствующих переходов в  $\Lambda$ -схеме ( $\hbar = \hbar/2\pi$ , где  $\hbar$  – постоянная Планка). Угловые скобки  $\langle \dots |$  и  $|\dots\rangle$  означают бра- и кет-векторы Дирака.

Оператор  $\hat{V}$  в (2) описывает взаимодействие атома с полем (1) в электро-дипольном приближении. Его можно представить в виде суммы операторов для каждого из встречных пучков  $\hat{V} = \hat{V}_1 + \hat{V}_2$ , где в резонансном приближении:

$$\hat{V}_1 = -\hbar R_1 \left[ e^{-i(\omega_1 t - k_1 z)} |3\rangle\langle 1| + e^{-i(\omega_2 t - k_2 z)} |3\rangle\langle 2| \right] + H.c., \quad (4)$$

$$\hat{V}_2 = -\hbar R_2 \left[ e^{-i(\omega_1 t + k_1 z + \phi_1 - \alpha)} |3\rangle\langle 1| + e^{-i(\omega_2 t + k_2 z + \phi_2 + \alpha)} |3\rangle\langle 2| \right] + H.c. \quad (5)$$

Здесь введены вещественные частоты Раби согласно определению:  $R_j = d_0 E_j/\hbar$ , где  $d_0$  – дипольные моменты оптических переходов в  $\Lambda$ -схеме, которые, для упрощения, мы считаем равными. “*H.c.*” означает эрмитово сопряженные слагаемые.

Оператор  $\hat{\mathcal{R}}$  в (2) описывает релаксационные процессы в атоме. Как и дипольные моменты переходов, скорости спонтанной релаксации по каналам  $|3\rangle \rightarrow |1\rangle$  и  $|3\rangle \rightarrow |2\rangle$  также считаем одинаковыми и равными  $\beta\gamma$ , где  $\beta$  – коэффициент ветвления, принимающий значение в диапазоне  $0 \leq \beta \leq 1$  (в частности,  $\beta=1$  соответствует закрытой системе уровней). В уравнении на матрицу плотности (2) не входят дифференциальные операторы по поперечным координатам  $\partial/\partial x$  и  $\partial/\partial y$ , что формально означает неограниченный размер лазерных пучков. В принятом случае П-образного профиля интенсивности учет ограниченности пучков и, следовательно, конечного времени взаимодействия атомов с полем можно учесть соответствующей пролетной константой релаксации, которую мы обозначим  $\Gamma$ . Выпишем в явном виде оператор  $\hat{\mathcal{R}}$ :

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{R}} = & \gamma \left[ \beta \rho_{33} \hat{P}_{11} + \beta \rho_{33} \hat{P}_{22} - 2\rho_{33} \hat{P}_{33} - \right. \\ & \left. - (\rho_{31} \hat{P}_{31} + \rho_{32} \hat{P}_{32} + H.c.) \right] - \\ & - \Gamma \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 \rho_{nm} \hat{P}_{nm} + \frac{\Gamma}{2} [\hat{P}_{11} + \hat{P}_{22}], \quad (6) \end{aligned}$$

где введены проекционные операторы  $\hat{P}_{nm} = |n\rangle\langle m|$ . Из этого выражения следует, что в наших обозначениях спонтанная релаксация возбужденно-го уровня  $|3\rangle$  равна  $2\gamma$ . В свою очередь, релаксация

оптических когерентностей – недиагональных элементов матрицы плотности  $\rho_{31}$ ,  $\rho_{32}$  и комплексно сопряженных им  $\rho_{13}$ ,  $\rho_{23}$  – описывается константой  $\gamma_{eg} = \gamma + \Gamma$ . Релаксация населенностей подуровней основного состояния  $\rho_{11}$ ,  $\rho_{22}$  и низкочастотных когерентностей  $\rho_{12}$ ,  $\rho_{21} = \rho_{12}^*$  происходит со скоростью  $\Gamma$ . Последнее слагаемое в (6) описывает установление изотропного состояния в атоме, когда подуровни  $|1\rangle$  и  $|2\rangle$  имеют одинаковую населенность, равную  $1/2$ . Отметим, что мы считаем газ атомов достаточно разреженным, чтобы пренебречь столкновениями и связанными с ними эффектами (в частности, столкновительной релаксацией). Все сделанные приближения достаточно типичны в теории субдоплеровской спектроскопии атомов щелочных металлов в ячейках без релаксационного покрытия стенок и без буферного газа.

Матрица плотности  $\hat{\rho}$  является как функцией времени ( $t$ ), так и функцией координат ( $z$ ). Мы будем рассматривать стационарный режим, в котором все переходные процессы (например, при влете атома в лазерный пучок) установились и населенности уровней энергии не зависят от времени. Между тем, как было предсказано теоретически [32] и подтверждено экспериментально [26], величина резонансного поглощения поля в газовой ячейке медленно осциллирует в пространстве. Это является следствием “конкуренции” состояний КПН, индуцируемых в атоме каждым из встречных двухчастотных пучков (см. п.2.2): области конструктивной интерференции состояний КПН сменяются областями деструктивной интерференции. Для учета такого эффекта в населенностях уровней  $\Lambda$ -схемы необходимо учесть низкочастотные пространственные гармоники  $\exp(\pm 2ik_{12}z)$ , где  $k_{12} = k_1 - k_2$ . Таким образом, для диагональных элементов матрицы плотности будем использовать следующее Фурье-разложение:

$$\rho_{nn}(z) \approx \rho_{nn}^{(0)} + \rho_{nn}^{(+)} e^{2ik_{12}z} + \rho_{nn}^{(-)} e^{-2ik_{12}z}, \quad (7)$$

где  $n=1,2,3$ . В силу эрмитовости матрицы плотности ( $\hat{\rho} = \hat{\rho}^\dagger$ ) имеем:  $\rho_{nn}^{(0)} = \rho_{nn}^{(0)*}$  и  $\rho_{nn}^{(+)} = \rho_{nn}^{(-)*}$ .

Состояние КПН в  $\Lambda$ -схеме есть особая суперпозиция подуровней  $|1\rangle$  и  $|2\rangle$  (см. п.2.2). Она образуется под действием когерентного взаимодействия атома одновременно с обоими спектральными составляющими поля. В свою очередь, это состояние характеризуется недиагональными элементами матрицы плотности

$\rho_{12}$  и  $\rho_{21}$ . Поэтому для последних справедливо следующее представление:

$$\rho_{12}(z, t) \approx e^{i\delta_{12}t} [\rho_{12}^{(+)} e^{ik_{12}z} + \rho_{12}^{(-)} e^{-ik_{12}z}], \quad (8)$$

$$\rho_{21}(z, t) \approx e^{-i\delta_{12}t} [\rho_{21}^{(+)} e^{ik_{12}z} + \rho_{21}^{(-)} e^{-ik_{12}z}], \quad (9)$$

откуда видно, что эти элементы осциллируют во времени на низкой частоте  $\delta_{12} = \omega_1 - \omega_2$ . Свойство эрмитовости матрицы плотности дает следующую связь амплитуд гармоник:  $\rho_{21}^{(+)} = \rho_{12}^{(-)*}$  и  $\rho_{21}^{(-)} = \rho_{12}^{(+)*}$ .

Разложения на гармоники (7)–(9) приводят к необходимости учета в оптических когерентностях не только гармоник вида  $\exp(\pm ik_1 z)$  и  $\exp(\pm ik_2 z)$ , как в  $\Lambda$ -схеме, взаимодействующей с одним бихроматическим пучком, но и комбинированных гармоник вида  $\exp(\pm i[2k_1 - k_2]z)$  и  $\exp(\pm i[k_1 - 2k_2]z)$  (см. также [32]). Таким образом, для оптических когерентностей имеем следующие представления:

$$\rho_{31}(z, t) = e^{-i\omega_1 t} [\rho_{31}^{(-1)} e^{-ik_1 z - i\phi_1} + \rho_{31}^{(+1)} e^{ik_1 z} + \rho_{31}^{(+21)} e^{i(2k_2 - k_1)z} + \rho_{31}^{(-21)} e^{-i(2k_2 - k_1)z - i\phi_1}], \quad (10)$$

$$\rho_{32}(z, t) = e^{-i\omega_2 t} [\rho_{32}^{(-2)} e^{-ik_2 z - i\phi_2} + \rho_{32}^{(+2)} e^{ik_2 z} + \rho_{32}^{(+12)} e^{i(2k_1 - k_2)z} + \rho_{32}^{(-12)} e^{-i(2k_1 - k_2)z - i\phi_2}]. \quad (11)$$

Аналогичные выражения можно записать для остальных оптических когерентностей, учитывая связь между ними:  $\rho_{13} = \rho_{31}^*$ ,  $\rho_{23} = \rho_{32}^*$ .

Используя все выписанные выражения (3)–(11), из (2) можно получить систему уравнений (оптические уравнения Блоха) на все элементы (гармоники) матрицы плотности. Эта система довольно громоздка, т.к. имеет ранг, равный 29. Однако, из нее можно легко исключить все гармоники оптических когерентностей и понизить ранг системы до 13. Кроме того, мы будем рассматривать частный случай, который представляет наибольший интерес с точки зрения наблюдения наибольшего контраста субдоплеровских резонансов в рассматриваемом двухчастотном методе [26,27,32,33]. А именно, будем считать рамановскую (двухфотонную) отстройку частоты равной нулю, т.е.  $\omega_1 - \omega_2 = \Delta_g$  (см. рис. 2). Итак, запишем оптические уравнения Блоха в явном виде, которые будут являться основой для получения аналитических решений в следующих параграфах. Для нулевой гармоники  $\rho_{11}^{(0)}$  имеем:

$$\begin{aligned} & \rho_{11}^{(0)} - \beta\gamma\tau\rho_{33}^{(0)} + 2\gamma_{eg}\tau(S_1 + S_2)N_{13}^{(0)} + \\ & + 2R_1^2\tau \operatorname{Re}\left\{L_1\rho_{12}^{(-)}\right\} + 2R_2^2\tau \operatorname{Re}\left\{L_2\rho_{12}^{(+)}e^{i\theta}\right\} = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь и далее  $\tau = \Gamma^{-1}$  – среднее время пролета атома через лазерное поле, а  $\theta = 2\alpha - \phi_{12}$ . Также, для краткости, мы будем использовать обозначение для гармоник разностей населенностей подуровней:  $N_{nm}^{(0,\pm)} = \rho_{nn}^{(0,\pm)} - \rho_{mm}^{(0,\pm)}$ .

Далее, для гармоники  $\rho_{11}^{(+)}$  имеем:

$$\begin{aligned} & (1 + 2i k_{12}v\tau)\rho_{11}^{(+)} - \beta\gamma\tau\rho_{33}^{(+)} + \\ & + \left[R_1^2L_1 + R_2^2L_2^*\right]\tau N_{13}^{(+)} + \\ & + R_1^2\tau L_1\rho_{12}^{(+)} + R_2^2\tau L_2^*\rho_{21}^{(+)}e^{-i\theta} = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

для гармоники  $\rho_{22}^{(0)}$ :

$$\begin{aligned} & \rho_{22}^{(0)} - \beta\gamma\tau\rho_{33}^{(0)} + 2\gamma_{eg}\tau(S_1 + S_2)N_{23}^{(0)} + \\ & + 2R_1^2\tau \operatorname{Re}\left\{L_1^*\rho_{12}^{(-)}\right\} + 2R_2^2\tau \operatorname{Re}\left\{L_2^*\rho_{12}^{(+)}e^{i\theta}\right\} = \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (14)$$

для гармоники  $\rho_{22}^{(+)}$ :

$$\begin{aligned} & (1 + 2i k_{12}v\tau)\rho_{22}^{(+)} - \beta\gamma\tau\rho_{33}^{(+)} + \\ & - \left[R_1^2L_1^* + R_2^2L_2\right]\tau N_{23}^{(+)} + \\ & + R_1^2\tau L_1^*\rho_{12}^{(+)} + R_2^2\tau L_2\rho_{21}^{(+)}e^{-i\theta} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Уравнения для гармоник  $\rho_{11}^{(-)}$  и  $\rho_{22}^{(-)}$  можно получить комплексным сопряжением, соответственно, уравнений (13) и (15). Аналогичные уравнения можно получить на гармоники возбужденного состояния  $\rho_{33}^{(0)}$ ,  $\rho_{33}^{(+)}$  и  $\rho_{33}^{(-)}$ . Однако, их можно заменить гораздо более компактными уравнениями, которые можно получить сложением уравнений на разные гармоники. Например, сложение уравнений для  $\rho_{11}^{(0)}$ ,  $\rho_{22}^{(0)}$  и  $\rho_{33}^{(0)}$  дает простое уравнение вида:

$$\rho_{11}^{(0)} + \rho_{22}^{(0)} + \rho_{33}^{(0)} + 2\gamma\tau(1 - \beta)\rho_{33}^{(0)} = 1. \quad (16)$$

Аналогично, складывая уравнения для  $\rho_{11}^{(+)}$ ,  $\rho_{22}^{(+)}$  и  $\rho_{33}^{(+)}$ , приходим к следующему простому уравнению:

$$\begin{aligned} & (1 + 2i\tau k_{12}v)[\rho_{11}^{(+)} + \rho_{22}^{(+)} + \rho_{33}^{(+)}] + \\ & + 2\gamma\tau(1 - \beta)\rho_{33}^{(+)} = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Комплексным сопряжением последнего уравнения можно получить следующее:

$$\begin{aligned} & (1 - 2i\tau k_{12}v)[\rho_{11}^{(-)} + \rho_{22}^{(-)} + \rho_{33}^{(-)}] + \\ & + 2\gamma\tau(1 - \beta)\rho_{33}^{(-)} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Отметим, что для закрытой системы ( $\beta = 1$ ), как и должно быть, из (16)–(18) и (7) следует сохранение полной населенности подуровней для всех  $z$  и  $t$ :

$$\operatorname{Tr}\{\hat{\rho}(z, t)\} = \rho_{11}(z, t) + \rho_{22}(z, t) + \rho_{33}(z, t) = 1. \quad (19)$$

Здесь  $\operatorname{Tr}\{\dots\}$  обозначает операцию взятия следа матрицы.

Осталось выписать уравнения для гармоник низкочастотных когерентностей. В частности, для  $\rho_{12}^{(+)}$  имеем:

$$\begin{aligned} & \left[1 + i k_{12}v\tau + 2\gamma_{eg}\tau(S_1 + S_2)\right]\rho_{12}^{(+)} + \\ & + R_1^2\tau \left[L_1N_{13}^{(+)} + L_1^*N_{23}^{(+)}\right] + \\ & + R_2^2\tau e^{-i\theta} \left[L_2N_{13}^{(0)} + L_2^*N_{23}^{(0)}\right] = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

для гармоники  $\rho_{12}^{(-)}$  имеем:

$$\begin{aligned} & \left[1 - i k_{12}v\tau + 2\gamma_{eg}\tau(S_1 + S_2)\right]\rho_{12}^{(-)} + \\ & + R_1^2\tau \left[L_1N_{13}^{(0)} + L_1^*N_{23}^{(0)}\right] + \\ & + R_2^2\tau e^{-i\theta} \left[L_2N_{13}^{(-)} + L_2^*N_{23}^{(-)}\right] = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

Остальные два уравнения для гармоник  $\rho_{21}^{(-)}$  и  $\rho_{21}^{(+)}$  получаются комплексным сопряжением уравнений (20) и (21), соответственно.

В выписанных уравнениях были использованы обозначения для параметров насыщения:

$$S_{1,2} = \frac{R_{1,2}^2}{\gamma_{eg}^2 + (\delta \mp kv)^2}, \quad (22)$$

и комплексных лоренцианов:

$$L_{1,2} = \frac{1}{\gamma_{eg} + i(\delta \mp kv)}. \quad (23)$$

При этом было использовано приближение:  $|\mathbf{k}_1| \approx |\mathbf{k}_2| \equiv k$ . Далее мы также будем полагать, что выполняется условие  $vk_{12} \approx v\Delta_g/c \ll \Gamma$ ,  $\gamma_{eg}S_{1,2}$ . Это условие может быть выполнено для узких световых пучков, о которых речь пойдет далее, и не очень слабых световых полей. В частности, для пучков диаметром  $d \sim 1$  мм, которые, например, использовались в работе [26], типовое значение  $\Gamma$

порядка  $10^{-2}\gamma$ . Тогда получаем, что для цезия, для которого  $2\gamma \approx 2\pi \times 4.6$  МГц, приближение  $vk_{12} \ll \Gamma$  выполняется с хорошим запасом для всех атомов, движущихся со скоростями менее  $10^3$  м/с, а это подавляющая часть атомов цезия при комнатной температуре (при  $T \approx 300$  К средняя тепловая скорость атомов цезия в газе составляет  $\approx 230$  м/с). Таким образом, в самих уравнениях на матрицу плотности мы будем полагать  $k_{12} \approx 0$ , что является типовым приближением, например, в теории явления КПН [35] (отказ от этого приближения приводит лишь к некоторому дополнительному уширению КПН-резонанса).

В выражениях (22), (23) была введена отстройка несущей частоты лазерного излучения  $\omega_0$  от средней частоты двух переходов в  $\Lambda$ -схеме:

$$\delta = \omega_0 - \frac{\omega_{31} + \omega_{32}}{2}. \quad (24)$$

Именно эта отстройка сканируется в экспериментах для наблюдения резонансной кривой, тогда как упомянутые выше две спектральные компоненты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  получаются из этой частоты, например, с помощью СВЧ модуляции излучения электрооптическим модулятором (ЭОМ). То есть, по существу  $\omega_1$  и  $\omega_2$  – это боковые полосы  $+1$  и  $-1$  порядков, соответственно.

## 2.2. Когерентное пленение населенностей и образование пика в поглощении

Перед решением выписанных оптических уравнений Блоха, продемонстрируем на качественном уровне причину наблюдения высококонтрастного субдоплеровского пика в поглощении лазерного поля средой резонансных атомов. Для этого запишем в явном виде состояния КПН, которые могут быть индуцированы в атоме каждым из двух встречных пучков по отдельности. Эти состояния, которые мы будем обозначать  $|\text{NC}\rangle$  (от англ. “noncoupled”), подчиняются уравнениям [43]:

$$\langle 3|\widehat{V}_j|\text{NC}_j\rangle = 0, \quad j = 1, 2. \quad (25)$$

Используя (4) и (5), получаем явный вид нормированных на единицу волновых функций:

$$|\text{NC}_1\rangle = \left( |1\rangle - e^{-i(\delta_{12}t - k_{12}z)}|2\rangle \right) / \sqrt{2}, \quad (26)$$

$$|\text{NC}_2\rangle = \left( |1\rangle - e^{-i(\delta_{12}t + k_{12}z - \theta)}|2\rangle \right) / \sqrt{2}, \quad (27)$$

Как видно из (25), находясь в состоянии КПН, атом не взаимодействует с лазерным полем и, следовательно, не флуоресцирует. Поэтому КПН состояние также называют “темным”.

При  $\delta \gg \Delta_{res}$ , где  $\Delta_{res}$  – полная ширина субдоплеровского резонанса на полувысоте (FWHM), в силу эффекта Доплера атомы газа могут находиться в резонансе одновременно только с одним из двух встречных световых пучков. Тогда, при достаточно малой релаксации основного состояния  $\Gamma$ , большая часть атомов оказывается в одном из двух состояний (26) или (27). Этим объясняется слабое поглощение поля на “крыльях” доплеровского контура (см. рис. 1, сплош.). В центре же резонансной кривой, где  $\delta \leq \Delta_{res}$ , атомы одновременно взаимодействуют с двумя встречными лазерными пучками. В этом смысле можно говорить о “конкуренции” лазерных пучков в приготовлении квантового состояния в атоме, результат которой сильно зависит от “степени” эквивалентности двух состояний (26) и (27). Действительно, рассмотрим скалярное произведение:

$$|\langle \text{NC}_1 | \text{NC}_2 \rangle| = \left( 1 + e^{i(\theta - 2k_{12}z)} \right) / 2, \quad (28)$$

откуда видно, что при

$$\theta - 2k_{12}z = (2n - 1)\pi \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (29)$$

состояния  $|\text{NC}_1\rangle$  и  $|\text{NC}_2\rangle$  ортогональны, т.е. они не могут существовать одновременно в атоме. Это можно назвать деструктивной интерференцией “темных” состояний, которая приводит к заметному поглощению света атомом по сравнению с уровнем поглощения при  $\delta \gg \Delta_{res}$ . Описанные особенности формирования состояний КПН в рассматриваемой конфигурации лазерного поля позволяют качественно объяснить возможность наблюдения высококонтрастного субдоплеровского пика поглощения в экспериментах (рис. 1).

Если атом находится в чистом состоянии КПН, например  $|\text{NC}_1\rangle$ , то его матрица плотности может быть представлена в виде:

$$\hat{\rho}(\text{NC}_1) = |\text{NC}_1\rangle\langle \text{NC}_1| = \frac{1}{2} \left( |1\rangle\langle 1| + e^{2i k_{12}z} |2\rangle\langle 2| - e^{i(\delta_{12}t - k_{12}z)} |1\rangle\langle 2| - e^{-i(\delta_{12}t - k_{12}z)} |2\rangle\langle 1| \right). \quad (30)$$

Если атом находится в состоянии  $|\text{NC}_2\rangle$ , то, помимо появления фазы  $\theta$ , в этих гармониках у  $k_{12}$  сменится знак. Из этого простого анализа следует, что

населенности подуровней (матричные элементы вида  $\langle n|\hat{\rho}|n\rangle$ ) должны содержать гармоники  $\exp(\pm 2k_{12}z)$ , в то время как низкочастотные когерентности осциллируют во времени и пространстве, как  $\exp(\pm i[\delta_{12}t \pm k_{12}z])$ . С этим и связано появление соответствующих гармоник в (7), (8) и (9). Отметим, что если среда облучается только одним из двух встречных пучков, то квантовое состояние в движущемся атоме газа адиабатически следует за полем и ненулевые пространственные гармоники в населенностях (7) не возникают [35]. Также можно показать, что в таком однопучковом режиме гармоники  $\rho_{12}^{(+)} = \rho_{21}^{(-)} = 0$ . При этом, если атом находится в чистом состоянии  $|\text{NC}_1\rangle$ , то для оставшихся ненулевых гармоник элементов матрицы плотности получаем простые и очевидные решения:  $\rho_{11}^{(0)} = \rho_{22}^{(0)} = 1/2$ ,  $\rho_{33}^{(0)} = 0$  и  $\rho_{12}^{(-)} = \rho_{21}^{(+)} = -1/2$ .

В экспериментах условие (29) может быть выполнено различными способами: перемещением ячейки вдоль оси  $z$ , перемещением зеркала в схеме, где встречный пучок формируется простым отражением исходного пучка обратно в ячейку (при этом изменяется фаза  $\phi_{12}$ , а, следовательно, и  $\theta$ ), изменением угла  $\alpha$  между линейными поляризациями встречных пучков. Все эти особенности наблюдались в экспериментах [26,32,33]. Из условия (29), в частности, следует, что с точки зрения максимизации амплитуды субдоплеровского пика преимуществом обладают короткие ячейки, в которых это условие с достаточной точностью выполняется на всей длине. Период осцилляций амплитуды резонанса при перемещении отражающего зеркала может быть найден из (29):  $\Delta_z = \pi/2|k_{12}|$  (здесь коэффициент 2 связан с тем, что при перемещении зеркала на  $\Delta z$  отраженные от него волны приобретают удвоенный фазовый сдвиг  $2k_{1,2}\Delta z$ ). В частности, для цезия период осцилляций амплитуды резонанса составляет  $\Delta_z(\text{Cs}) \approx 8$  мм, что также подтверждается экспериментами с микроячейкой ( $L \approx 1.4$  мм), изготовленной по технологии MEMS [26] и с компактной стеклянной ячейкой ( $L \approx 5$  мм) [33].

Рассматриваемая  $\Lambda$ -схема уровней является лишь приближением реальной структуры уровней энергии в атомах щелочных металлов. Поэтому на ее основе можно делать лишь грубые оценки параметров субдоплеровского резонанса, наблюдаемого в экспериментах. Реальная схема уровней энергии была рассмотрена в [26] на основе

численных расчетов оптических уравнений Блоха. Между тем,  $\Lambda$ -схема может быть использована для получения явных аналитических выражений для формы резонансной линии и объяснения причин появления субдоплеровского пика в поглощении среды. Этому и посвящены следующие два параграфа.

### 2.3. Режим пробной волны

Рассмотрим сначала режим, в котором один из двухчастотных пучков (пробный пучок) значительно слабее другого. Пусть это будет поле  $E_2$  (см. рис. 2). Причем, интенсивность этого пучка также полагаем гораздо меньше интенсивности насыщения  $I_s$ , которая для атомов щелочных металлов составляет единицы мВт/см<sup>2</sup>. Другой пучок, поле накачки  $E_1$ , мы не будем пока существенно ограничивать по интенсивности, т.е. он может быть сравним с  $I_s$ . В таком случае задачу можно решить в линейном режиме по пробному полю, когда это поле никак не отражается на оптических характеристиках среды, а лишь “пробует” то состояние атомов, которое подготовлено волной накачки. Поэтому, в уравнениях на матрицу плотности следует учесть только влияние поля  $E_1$  и положить  $R_2 = 0$ . Кроме того, из системы уравнений исчезнут некоторые гармоники, например,  $\rho_{nn}^{(\pm)}$  ( $n = 1, 2, 3$ ), которые являются следствием действия двух полей одновременно. В итоге ранг этой системы понижается до 5, и она примет простой вид:

$$\rho_{11}^{(0)} - \beta\gamma\tau\rho_{33}^{(0)} + 2\gamma_{eg}\tau S_1 N_{13}^{(0)} + 2R_1^2\tau \text{Re}\left\{L_1\rho_{12}^{(-)}\right\} = \frac{1}{2}, \quad (31)$$

$$\rho_{22}^{(0)} - \beta\gamma\tau\rho_{33}^{(0)} + 2\gamma_{eg}\tau S_1 N_{23}^{(0)} + 2R_1^2\tau \text{Re}\left\{L_1^*\rho_{12}^{(-)}\right\} = \frac{1}{2}, \quad (32)$$

$$\left(1 + 2\gamma_{eg}\tau S_1\right)\rho_{12}^{(-)} + R_1^2\tau \left[L_1 N_{13}^{(0)} + L_1^* N_{23}^{(0)}\right] = 0. \quad (33)$$

Уравнение для  $\rho_{33}^{(0)}$  остается в неизменном виде (16), а уравнение для  $\rho_{21}^{(+)}$  может быть получено комплексным сопряжением уравнения (33).

Из выписанных уравнений легко показать, что в них присутствует симметрия относительно замены  $\rho_{11}^{(0)} \leftrightarrow \rho_{22}^{(0)}$ . Это же следует из качественного

анализа рис. 2 в рассматриваемых условиях. Следовательно, не решая систему, мы получаем  $\rho_{11}^{(0)} = \rho_{22}^{(0)}$  и  $N_{13}^{(0)} = N_{23}^{(0)}$ . Тогда из (33) для  $\rho_{12}^{(-)}$  находим:

$$\rho_{12}^{(-)} = -\frac{\xi_1}{1 + \xi_1} N_{13}^{(0)}, \quad (34)$$

где был введен пролетный параметр насыщения согласно определению (см., например, [44]):

$$\xi_j \equiv 2\gamma_{eg}\tau S_j. \quad (35)$$

Из (34), в частности, следует, что гармоника  $\rho_{12}^{(-)}$  вещественная, как и гармоника  $\rho_{21}^{(+)} = \rho_{12}^{(-)*}$ . Как уже было отмечено в п.2.2, этими элементами матрицы плотности описывается состояние КПН, как суперпозиция уровней  $|1\rangle$  и  $|2\rangle$ . Их вещественность является следствием того, что мы изначально положили рамановскую отстройку равной нулю.

Выпишем окончательное решение уравнений Блоха в линейном приближении по пробному полю:

$$\rho_{11}^{(0)} = \rho_{22}^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{(1 + 2(1 - \beta)\gamma\tau)/2}{1 + 2\gamma\tau + [4 + 2(2 - \beta)\gamma\tau]} \xi_1, \quad (36)$$

$$\rho_{33}^{(0)} = \frac{\xi_1}{1 + 2\gamma\tau + [4 + 2(2 - \beta)\gamma\tau]} \xi_1, \quad (37)$$

$$\rho_{12}^{(-)} = \rho_{21}^{(+)} = -\frac{\xi_1/2}{1 + \xi_1} \times \left[ 1 - \frac{3 + 2(1 - \beta)\gamma\tau}{1 + 2\gamma\tau + [4 + 2(2 - \beta)\gamma\tau]} \xi_1 \right]. \quad (38)$$

Из этого решения, в частности, следует, что в закрытой системе ( $\beta = 1$ ) в пределе достаточно большого времени взаимодействия ( $\tau \rightarrow \infty$ ) все атомы накачиваются в состояние КПН, для которого  $\rho_{11}^{(0)} = \rho_{22}^{(0)} = 1/2$ ,  $\rho_{33}^{(0)} = 0$  и  $\rho_{12}^{(-)} = \rho_{21}^{(+)} = -1/2$ . Этот же результат мы получали в п.2.2 без решения системы на матрицу плотности, что является проверкой полученных решений.

В рассматриваемом режиме ( $I_2 \ll I_1$ ) исследуемым сигналом является поглощение пробного пучка с интенсивностью  $I_2$ , включающего две спектральные составляющие  $E_2(\omega_1)$  и  $E_2(\omega_2)$ , которые взаимодействуют с отдельными переходами в  $\Lambda$ -схеме. Укороченное волновое уравнение для медленной амплитуды каждой из этих составляющих имеет известный вид ( $j = 1, 2$ ):

$$\frac{dE_2(\omega_j)}{dz} = 2\pi ikP(\omega_j), \quad (39)$$

где  $P(\omega_j)$  – поляризация среды на частоте  $\omega_j$ , изменяющаяся медленно в пространстве (по сравнению с осцилляциями  $e^{ikz}$ ). Здесь, как и раньше, мы положили  $k_1 \approx k_2 = k$ . Учитывая, что  $I = cE^2/2\pi$  и  $P = n_a \text{Tr}[\hat{d}_0 \hat{\rho}]$ , где  $\hat{d}_0$  – оператор дипольного момента,  $n_a$  – концентрация атомов, можно прийти к следующему дифференциальному уравнению, описывающему изменение интенсивности двухчастотного пробного пучка в среде:

$$\frac{dI_2}{dz} = -2\gamma_{eg} \hbar k c n_a S_2 \times \left[ N_{13}^{(0)} + \rho_{12}^{(-)} \left\{ \cos(\eta) + \frac{\delta + kv}{\gamma_{eg}} \sin(\eta) \right\} \right]. \quad (40)$$

При выводе этого выражения было учтено, что  $\rho_{12}^{(-)}$  – вещественная функция и  $N_{13}(0) = N_{23}(0)$ . Также была введена фаза  $\eta(z) = \theta - 2k_{12}z$ . Формула (40) имеет простой физический смысл. Действительно,  $\hbar kc = pc = E_{ph}$  – это энергия одного фотона пробного пучка, которая в линейном режиме по полю рассеивается со скоростью  $\sim \gamma_{eg} S_2$ . Количество этой энергии, рассеиваемой в единице объема среды должно быть пропорционально количеству рассеивающих частиц, т.е.  $n_a$ . Все нелинейные процессы, которые влияют на скорость рассеяния энергии из пробного пучка описываются слагаемыми в квадратных скобках. Так, в линейном режиме (по обоим пучкам) населенности подуровней в  $\Lambda$ -схеме совпадают с изотропным начальным состоянием:  $\rho_{11} = \rho_{22} = 1/2$ ,  $\rho_{33} = 0$ ,  $\rho_{12}^{(-)} = 0$ , поэтому  $N_{13}^{(0)} = \rho_{11} = 1/2$ . Отклонение от этих значений – суть проявление нелинейных эффектов. В частности, первое слагаемое в скобках ( $N_{13}^{(0)}$ ) связано с выравниванием населенностей подуровней основного и возбужденного состояний, происходящее под влиянием пучка накачки и описывающее явление насыщенного поглощения. Это явление при перестройке частоты лазера (т.е., при сканировании  $\delta$ ) приводит к наблюдению резонанса насыщенного поглощения в проходящей через ячейку интенсивности пробного пучка. Второе слагаемое в скобках, пропорциональное  $\rho_{12}^{(-)}$ , связано с образованием когерентного состояния, как суперпозиции подуровней  $|1\rangle$  и  $|2\rangle$ . Причем, как видно из (40), это состояние либо уменьшает поглощение пробной волны, либо увеличивает его в зависимости от фазы  $\eta(z)$ , что находится в

качественном согласии с анализом, проведенном в п.2.2.

Учитывая связь параметра насыщения  $S_2$  с интенсивностью волны  $I_2$  и дипольным моментом перехода  $d_0$ , а также известную формулу  $d_0^2 = 3\beta\gamma\hbar/4k^3$ , перепишем уравнение (40) в виде:

$$\frac{dI_2}{dz} = -\frac{3\lambda^2 n_a}{2\pi} \varkappa(I_1, z) I_2, \quad (41)$$

где был введен безразмерный показатель поглощения пробной волны:

$$\varkappa(I_1, z) = \beta\gamma\gamma_{eg} \left| L_2 \right|^2 \left[ N_{13}^{(0)} + \rho_{12}^{(-)} \left\{ \cos(\eta) + \frac{\delta + kv}{\gamma_{eg}} \sin(\eta) \right\} \right]. \quad (42)$$

Здесь лоренциан  $L_2$  определяется формулой (23).

Как уже отмечалось выше в п.2.2, короткие газовые ячейки предпочтительны для использования в методе двухчастотной спектроскопии (см. также [26,33]). В таких ячейках можно пренебречь зависимостью показателя поглощения  $\varkappa$  от переменной  $z$ , происходящее из-за присутствия медленных гармоник  $\propto \exp(\pm 2ik_{12}z)$ . Иными словами, для упрощения, в выражении (42) переменную  $z$  можно считать еще одним заданным параметром. Тогда уравнение (41) имеет весьма простое решение в виде известного закона Бугера:

$$I_2(z = L_{cell}) = I_{20} e^{-\varkappa(I_1) L_{cell}}. \quad (43)$$

Здесь  $I_{20}$  есть интенсивность пробного пучка на входе в ячейку, а  $I_2(z = L_{cell})$  – на выходе из нее.

Таким образом, резонансное поглощение пробного поля  $E_2$  описывается функцией  $\varkappa(\delta)$ . Между тем, эта функция также зависит от скорости атома  $v$ . Поэтому в случае газа атомов необходимо произвести ее усреднение по скоростям теплового движения с учетом распределения Максвелла:

$$\begin{aligned} \Upsilon(\delta) &\equiv \langle \varkappa(\delta, v) \rangle_v = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}v_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \varkappa(\delta, v) e^{-v^2/v_0^2} dv, \end{aligned} \quad (44)$$

где  $v_0 = \sqrt{2k_B T/m_0}$  – наиболее вероятная скорость теплового движения атома в газе ( $k_B$  – постоянная Больцмана,  $m_0$  – масса атома).

Для дальнейшего упрощения задачи и получения компактного аналитического выражения для  $\Upsilon(\delta)$  мы воспользуемся приближением первого порядка по теории возмущений для пучка накачки,

полагая  $\xi_1 \ll 1$ . Тогда, учитывая явный вид решений (36)–(38), приближенное выражение для показателя поглощения пробной волны примет вид:

$$\varkappa \approx \frac{\beta\gamma\gamma_{eg}}{2} \left| L_2 \right|^2 \left[ 1 - \frac{3 + 2(1 - \beta)\gamma\tau}{1 + 2\gamma\tau} \xi_1 - \xi_1 \left\{ \cos(\eta) + \frac{\delta + kv}{\gamma_{eg}} \sin(\eta) \right\} \right]. \quad (45)$$

Как мы покажем далее, слагаемое в скобках, пропорциональное  $\sin(\eta)$ , после усреднения по скоростям приведет к важной особенности коэффициента поглощения – появлению асимметрии нелинейного резонанса. С учетом приближения (45) усреднение по скоростям атомов становится тривиальным и приводит к выражению вида:

$$\Upsilon_{total}(\delta) = \Upsilon_{lin}(\delta) + \Upsilon_{SAR}(\delta) + \Upsilon_{interCPT}(\delta), \quad (46)$$

где линейное поглощение пробного поля, не зависящее от интенсивности пучка накачки, описывается слагаемым

$$\Upsilon_{lin}(\delta) = \frac{\sqrt{\pi}\beta\gamma}{2\Delta_D} \Phi_r\left(\frac{\gamma_{eg} + i\delta}{\Delta_D}\right), \quad (47)$$

которое приводит к формированию широкого контура Фойгта (см. рис. 1). В своей центральной части этот контур близок к доплеровскому контуру с полушириной по уровню  $e^{-1}$ , равной  $\Delta_D = kv_0$ . Поэтому в спектроскопии его часто также называют доплеровским. В последнем выражении была введена функция:

$$\Phi_r(x) = \text{Re} \left\{ e^{x^2} (1 - \text{erf}(x)) \right\}, \quad (48)$$

где  $\text{erf}(x)$  – функция ошибок.

Второе и третье слагаемые в (46) описывают нелинейные эффекты. В частности,  $\Upsilon_{SAR}$  ответственно за резонанс насыщенного поглощения:

$$\begin{aligned} \Upsilon_{SAR}(\delta) &= -\frac{3 + 2(1 - \beta)\gamma\tau}{1 + 2\gamma\tau} \times \frac{\sqrt{\pi}\beta^2\gamma^3\gamma_{eg}\tau}{8\Delta_D(\gamma_{eg}^2 + \delta^2)} \times \\ &\times \left[ \Phi_r\left(\frac{\gamma_{eg} + i\delta}{\Delta_D}\right) - \frac{\gamma_{eg}}{\delta} \Phi_i\left(\frac{\gamma_{eg} + i\delta}{\Delta_D}\right) \right] \times \frac{I_1}{I_s}, \end{aligned} \quad (49)$$

где

$$\Phi_i(x) = \text{Im} \left\{ e^{x^2} (1 - \text{erf}(x)) \right\}, \quad (50)$$

а интенсивность насыщения введена стандартной формулой:  $I_s = 4\pi^2 \hbar c \gamma / \lambda^3$ .

Слагаемое  $\Upsilon_{interCPT}$  связано с образованием состояния КПН в атоме под действием волны

накачки, которое взаимодействует с пробной волной:

$$\Upsilon_{interCPT}(\delta) = -\frac{\sqrt{\pi}\beta^2\gamma^3\gamma_{eg}\tau}{8\Delta_D(\gamma_{eg}^2 + \delta^2)} \times \left[ \Phi_r\left(\frac{\gamma_{eg} + i\delta}{\Delta_D}\right) - \frac{\gamma_{eg}}{\delta}\Phi_i\left(\frac{\gamma_{eg} + i\delta}{\Delta_D}\right) \right] \times \left\{ \cos(\eta) + \frac{\delta}{\gamma_{eg}}\sin(\eta) \right\} \times \frac{I_1}{I_s}. \quad (51)$$

Выражениям (49) и (51) можно придать более простой вид, учитывая, что эти функции сконцентрированы по большей части в области  $\delta \sim \gamma_{eg} \ll \Delta_D$ , поэтому  $\Phi_r \approx 1 - 2(2\gamma_{eg}\delta/\Delta_D^2)^2 \approx 1$  и  $\Phi_i \approx 4\gamma_{eg}\delta/\Delta_D^2 \ll 1$ . Тогда для нелинейных вкладов в  $\Upsilon$  имеем выражения:

$$\Upsilon_{SAR}(\delta) \approx -\frac{3 + 2(1 - \beta)\gamma\tau}{1 + 2\gamma\tau} \times \frac{\sqrt{\pi}\beta^2\gamma^3\gamma_{eg}\tau}{8\Delta_D(\gamma_{eg}^2 + \delta^2)} \times \frac{I_1}{I_s}, \quad (52)$$

$$\Upsilon_{interCPT}(\delta) \approx -\frac{\sqrt{\pi}\beta^2\gamma^3\tau}{8\Delta_D(\gamma_{eg}^2 + \delta^2)} \times \left[ \gamma_{eg}\cos(\eta) + \delta\sin(\eta) \right] \times \frac{I_1}{I_s}. \quad (53)$$

Как видно из этих выражений, функция (52) является четной по  $\delta$  и описывается простым лоренцевским контуром. В то же время, функция (53) содержит слагаемое  $\sim \delta\sin(\eta)$ , что приводит к появлению асимметрии субдоплеровского резонанса при  $\eta \neq \pi n$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Также из этих выражений следует, что функция  $\Upsilon_{SAR}$  всегда будет иметь отрицательный знак, тогда как знаком функции  $\Upsilon_{interCPT}$  можно управлять, меняя фазу  $\eta$ . В частности, особый интерес представляет случай, когда  $\eta = (2n - 1)\pi$ , при котором, как было показано в п.2.2, можно ожидать появления резонансного провала в проходящей через ячейку интенсивности пробного пучка. Для явной демонстрации такой возможности, исходя из полученных выражений, сравним относительные веса слагаемых  $\Upsilon_{SAR}$  и  $\Upsilon_{interCPT}$  при выбранной фазе  $\eta$ :

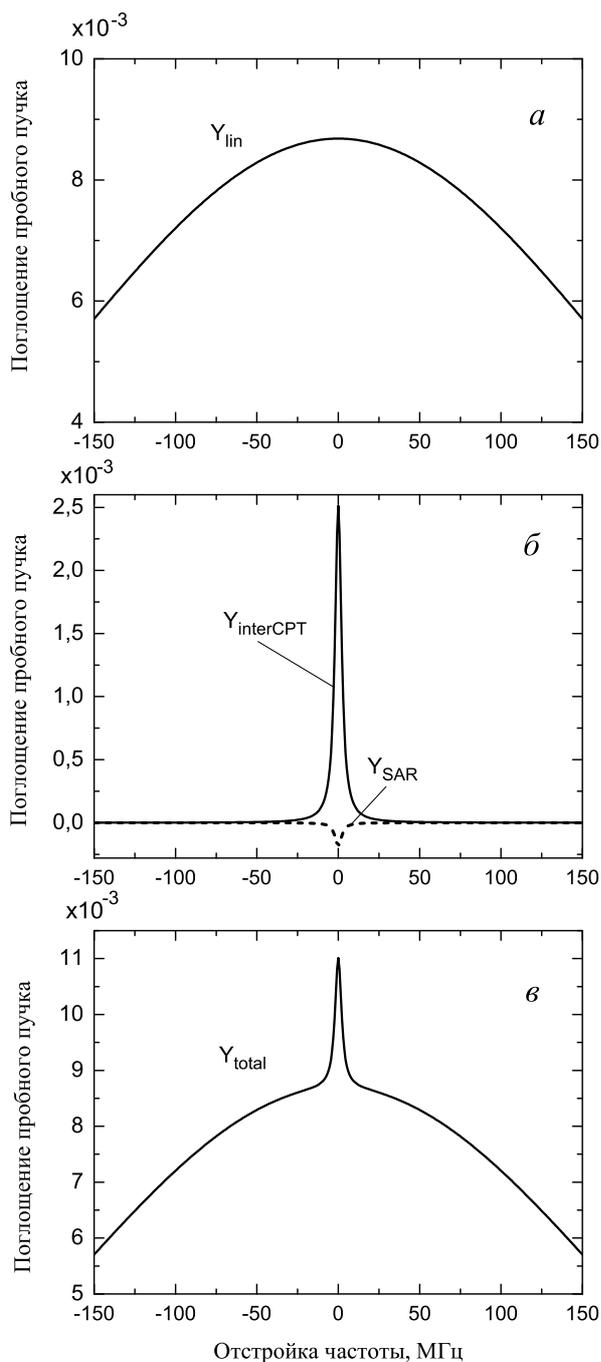
$$\frac{\Upsilon_{interCPT}}{\Upsilon_{SAR}} \approx -\frac{1 + 2\gamma\tau}{3 + 2(1 - \beta)\gamma\tau}. \quad (54)$$

Отсюда следует, что в закрытой системе ( $\beta = 1$ ) вклад от  $\Upsilon_{interCPT}$  будет преобладать по модулю над вкладом от  $\Upsilon_{SAR}$  при выполнении условия  $\gamma\tau > 1$ , которое обычно выполняется с хорошим запасом в экспериментах с атомами

щелочных металлов. Таким образом, при  $\eta = (2n - 1)\pi$  в закрытой системе выполняется условие  $\Upsilon_{interCPT} \gg \Upsilon_{SAR}$ , а учитывая, что знаки у этих вкладов различаются, то это обосновывает возможность наблюдения контрастного субдоплеровского резонанса в виде провала в проходящей через среду интенсивности света (рис. 1, сплош.) вместо обычного РНП в виде пика пропускания (рис. 1, штрих.). С другой стороны, в существенно открытой системе ( $\beta \ll 1$ ), как легко видеть из (54), вклад от  $\Upsilon_{SAR}$  всегда будет хоть и незначительно, но преобладать над вкладом от  $\Upsilon_{interCPT}$ , и субдоплеровский резонанс будет иметь вид пика (провала) в пропускании (поглощении) ячейки. Эти выводы согласуются с численными решениями оптических уравнений Блоха, проведенными в работе [32].

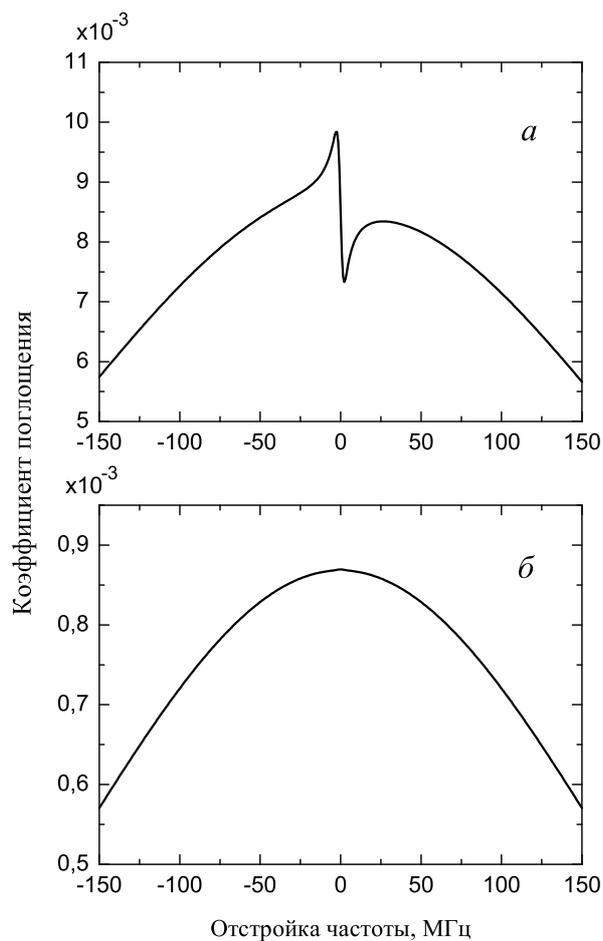
Продемонстрируем вышесказанное графически. На рис. 3а изображены по отдельности линейный и нелинейные вклады в показатель поглощения  $\Upsilon(\delta)$  при  $\beta = 1$ ,  $\eta = \pi$ ,  $I_1 = 50$  мВт/см<sup>2</sup>,  $\Delta_D = 2\pi \times 230$  МГц,  $\Gamma = 5 \times 10^{-2}\gamma$ ,  $2\gamma = 2\pi \times 4.56$  МГц,  $\lambda = 894.6$  нм – это соответствует D<sub>1</sub> линии цезия при температуре атомов около 50°C и диаметре пучка около 0.5 мм, как в экспериментах с микроячейками. Интенсивность насыщения при этих параметрах равна  $\approx 2.5$  мВт/см<sup>2</sup>. Из рис. 3а видно, что вклад от  $\Upsilon_{interCPT}$  (кривая 3) существенно превосходит вклад от  $\Upsilon_{SAR}$  (кривая 2), что в результате и приводит к наблюдению однородно уширенного резонанса в виде высококонтрастного провала (пика) в прохождении (поглощении) света резонансной средой (см. рис. 1, сплош.). Суммарное действие всех вкладов отражено на рис. 3б.

Выше мы отмечали важную особенность функции  $\Upsilon(\delta)$ , связанную с появлением асимметрии при  $\eta \neq \pi n$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$ . На рис. 4а хорошо видна эта асимметрия при  $\eta = \pi/2$ , когда в (53)  $\sin(\eta) = 1$ . Такого рода асимметрия обычно является нежелательной при использовании резонанса в качестве репера для стабилизации частоты в КСЧ, поскольку она приводит к появлению дополнительного сдвига сигнала ошибки, не связанного с динамическим штарковским сдвигом уровней энергии перехода. Поэтому, фаза  $\eta$  должна хорошо контролироваться в экспериментах при стабилизации частоты излучения в рассматриваемой схеме с пробным пучком. Другая особенность полученных решений демонстрируется на рис. 4б и связана с исчезновением пика поглощения в существенно открытой системе. На рисунке субдоплеровский резонанс неразличим на



**Рис. 3.** Различные вклады в коэффициент поглощения пробного пучка: (а) линейное поглощение (доплеровский контур), (б) нелинейные слагаемые  $\Upsilon_{SAR}$  (штрих.) и  $\Upsilon_{interCPT}$  (сплош.), (в) общий вид резонансной кривой с учетом всех вкладов. Параметры расчета приведены в тексте.

фоне широкого доплеровского контура, поскольку  $\Upsilon_{interCPT} \approx -\Upsilon_{SAR}$  при  $\beta \ll 1$  и  $\gamma\tau \gg 1$ .



**Рис. 4.** Общий вид резонансной кривой в следующих случаях: (а) асимметрия субдоплеровского резонанса при  $\beta=1$ ,  $\eta=\pi/2$  и (б) отсутствие нелинейного резонанса в открытой системе при  $\beta=0.1$ ,  $\eta=\pi$ . Остальные параметры расчета такие же, как для рис. 3.

#### 2.4. Режим слабой стоячей волны

В этом разделе мы рассмотрим другой часто используемый на практике режим – поле стоячей световой волны. В этом режиме интенсивности встречных пучков близки ( $I_1 \approx I_2$ ). В этом режиме мы будем интересоваться поглощением обоих встречных световых пучков в резонансной среде. Это связано с тем, что в экспериментах режим стоячей световой волны чаще всего формируется простым отражением пучка  $\mathbf{E}_1$ , после его прохождения ячейки, обратно в ячейку с помощью зеркала (так формируется пучок  $\mathbf{E}_2$ ). Тогда на фотоприемнике наблюдается сигнал, пропорциональный поглощению обоих пучков.

Для получения аналитических выражений мы будем использовать теорию возмущений (ТВ)

по пролетному параметру насыщения  $\xi$ , полагая  $\xi_1 \sim \xi_2 \ll 1$  и  $\gamma\tau > 1$ . Эти условия соответствуют приближению узких световых пучков (см. также [44]). Отметим, что слагаемые в оптических уравнениях Блоха, пропорциональные  $R_j^2 \tau \text{Re}\{L_j\}$  ( $j=1,2$ ) имеют порядок малости  $\xi_j$  или меньше. Также для упрощения задачи мы полагаем систему уровней закрытой ( $\beta=1$ ). Очевидно, что в нулевом порядке малости по  $\xi_{1,2}$ , т.е. в отсутствии поля, отличными от нуля являются только нулевые гармоники населенностей подуровней основного состояния:  $\rho_{11,0}^{(0)} = \rho_{22,0}^{(0)} = 1/2$ . Здесь и далее нижний индекс после запятой означает порядок по ТВ. С учетом этих значений, из уравнений, представленных в п.2.1, легко получить решение для следующих ненулевых элементов матрицы плотности в первом порядке ТВ:

$$\rho_{11,1}^{(0)} = \rho_{22,1}^{(0)} = -\frac{(\xi_1 + \xi_2)/2}{1 + 2\gamma\tau}, \quad (55)$$

$$\rho_{33,1}^{(0)} = -2\rho_{11,1}^{(0)} = \frac{\xi_1 + \xi_2}{1 + 2\gamma\tau}, \quad (56)$$

$$\rho_{12,1}^{(+)} = \rho_{21,1}^{(-)*} = -\frac{\xi_2}{2} e^{-i\theta}, \quad (57)$$

$$\rho_{12,1}^{(-)} = \rho_{21,1}^{(+)*} = -\xi_1/2. \quad (58)$$

При  $\xi_2 = 0$ , эти выражения совпадают с (36)–(38) в рассматриваемом приближении ( $\xi_1 \ll 1$  и  $\beta=1$ ).

Из уравнений Максвелла-Блоха можно показать, что поглощение суммарного поля  $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$  пропорционально полной населенности возбужденного уровня  $\rho_{33}$ , т.е.

$$\frac{dI_t}{dz} \propto \rho_{33}(I_1, I_2, z), \quad (59)$$

где  $I_t = I_1 + I_2$ . Исходя из (7),  $\rho_{33}$  может быть представлена в виде:

$$\rho_{33}(z) = \rho_{33}^{(0)} + 2 \text{Re}\{e^{2ik_{12}z} \rho_{33}^{(+)}\}, \quad (60)$$

где, как и раньше, мы полагаем зависимость от координаты достаточно медленной, чтобы переменная  $z$  считалась параметром, постоянным на длине ячейки – это избавляет от необходимости интегрирования по координате в (59). Далее, для краткости, мы приведем решения только для гармоник  $\rho_{33}$ , входящих в анализируемый сигнал (60). Так, во втором порядке ТВ имеем:

$$\rho_{33,2}^{(0)} = -3 \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{(1 + 2\gamma\tau)^2} - 6 \frac{\xi_1 \xi_2}{1 + 2\gamma\tau} - \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{1 + 2\gamma\tau}. \quad (61)$$

Первое слагаемое здесь описывает эффект самонасыщения среды под действием каждого из встречных пучков. Этот эффект отсутствовал при анализе поглощения только пробного пучка в линейном режиме (см. п.п.2.3). Далее следует слагаемое, пропорциональное произведению интенсивностей встречных пучков и описывающее, после усреднения по скоростям, резонанс насыщенного поглощения. Последнее слагаемое связано с образованием темных состояний в атомах под действием каждого из пучков по отдельности. Эти состояния начинают “конкурировать” в центре резонансной кривой, что описывается гармоникой  $\rho_{33,2}^{(+)}$  и приводит, согласно (60), к зависимости населенности возбужденного состояния от  $z$ . Выражение для этой гармоники имеет вид:

$$\rho_{33,2}^{(+)} = -\frac{\xi_1 \xi_2}{1 + 2\gamma\tau} \left(1 + i \frac{kv}{\gamma_{eg}}\right) e^{-i\theta}. \quad (62)$$

Далее, по аналогии с (44), необходимо усреднить выражения (56), (61) и (62) по скоростям атомов. Для удобства мы введем краткое обозначение для усредненной населенности возбужденного уровня и запишем ее в следующем виде:

$$W(\delta) \equiv \langle \rho_{33}(\delta, v) \rangle_v = W_{lin} + W_{SS} + W_{CPT} + W_{SAR} + W_{interCPT}. \quad (63)$$

Здесь первое слагаемое описывает линейное поглощение суммарного поля в ячейке, т.е.  $W_{lin}/I_t$  не зависит от интенсивности  $I_t$ :

$$W_{lin}(\delta) = \frac{\sqrt{\pi}\gamma^2\tau}{2\Delta_D(1 + 2\gamma\tau)} \Phi_r\left(\frac{\gamma_{eg} + i\delta}{\Delta_D}\right) \frac{I_t}{I_s}. \quad (64)$$

Остальные слагаемые в (63) описывают различные нелинейные эффекты. Так, эффект самонасыщения среды от каждого из пучков по отдельности описывается вкладом:

$$W_{SS}(\delta) = -\frac{3\gamma^4\tau^2}{8\Delta_D\gamma_{eg}(1 + 2\gamma\tau)^2} \times \left[ \frac{2\gamma_{eg}}{\Delta_D} + \sqrt{\pi} \left(1 - \frac{2\gamma_{eg}^2}{\Delta_D^2}\right) \Phi_r\left(\frac{\gamma_{eg} + i\delta}{\Delta_D}\right) + \frac{2\sqrt{\pi}\gamma_{eg}\delta}{\Delta_D^2} \Phi_i\left(\frac{\gamma_{eg} + i\delta}{\Delta_D}\right) \right] \times \frac{I_1^2 + I_2^2}{I_s^2}. \quad (65)$$

Помимо самонасыщения, каждый из пучков вдали от центра резонанса просветляет среду за счет накачки атомов в состояние КПН, что описывается очень похожим слагаемым:

$$W_{CPT}(\delta) = -\frac{\gamma^4 \tau^2}{8\Delta_D \gamma_{eg}(1+2\gamma\tau)} \times \left[ \frac{2\gamma_{eg}}{\Delta_D} + \sqrt{\pi} \left( 1 - \frac{2\gamma_{eg}^2}{\Delta_D^2} \right) \Phi_r \left( \frac{\gamma_{eg} + i\delta}{\Delta_D} \right) + \frac{2\sqrt{\pi}\gamma_{eg}\delta}{\Delta_D^2} \Phi_i \left( \frac{\gamma_{eg} + i\delta}{\Delta_D} \right) \right] \times \frac{I_1^2 + I_2^2}{I_s^2}. \quad (66)$$

Последние две формулы можно записать в приближенном виде, поскольку выполняется соотношение  $\gamma_{eg} \ll \Delta_D$ :

$$W_{SS}(\delta) \approx -\frac{3\sqrt{\pi}\gamma^4 \tau^2}{8\Delta_D \gamma_{eg}(1+2\gamma\tau)^2} \times \Phi_r \left( \frac{\gamma_{eg} + i\delta}{\Delta_D} \right) \times \frac{I_1^2 + I_2^2}{I_s^2}, \quad (67)$$

$$W_{CPT}(\delta) \approx -\frac{\sqrt{\pi}\gamma^4 \tau^2}{8\Delta_D \gamma_{eg}(1+2\gamma\tau)} \times \Phi_r \left( \frac{\gamma_{eg} + i\delta}{\Delta_D} \right) \times \frac{I_1^2 + I_2^2}{I_s^2}. \quad (68)$$

Отметим, что эффекты, описываемые этими двумя слагаемыми, отсутствуют в показателе поглощения  $\Upsilon(\delta)$ , исследованном в предыдущем параграфе. Это связано с тем, что этот показатель был рассчитан в линейном режиме по пробному полю, тогда как в настоящем параграфе населенность  $W(\delta)$  содержит в себе нелинейные эффекты от обоих пучков. Далее, как можно видеть из сравнения (67) и (68), при формальном условии  $\gamma\tau \gg 1$  эффект от накачки атомов в состоянии КПН ( $W_{CPT}$ ) преобладает от эффекта самонасыщения ( $W_{SS}$ ) оптических переходов в  $\Lambda$ -схеме. Это неудивительно, поскольку при увеличении времени взаимодействия с лазерным полем ( $\tau \gg \gamma^{-1}$ ) атомы больше накапливаются в состоянии КПН, переставая взаимодействовать с излучением, чем испытывают эффект самонасыщения от выравнивания населенностей возбужденного и основных подуровней.

Нелинейный эффект, приводящий к резонансу насыщенного поглощения, описывается слагаемым:

$$W_{SAR}(\delta) = -\frac{3\sqrt{\pi}\gamma^4 \gamma_{eg} \tau^2}{4\Delta_D(1+2\gamma\tau)^2(\gamma_{eg}^2 + \delta^2)} \times \left[ \Phi_r \left( \frac{\gamma_{eg} + i\delta}{\Delta_D} \right) - \frac{\gamma_{eg}}{\delta} \Phi_i \left( \frac{\gamma_{eg} + i\delta}{\Delta_D} \right) \right] \times \frac{I_1 I_2}{I_s^2}, \quad (69)$$

В отличие от слагаемых (65) и (66), последнее выражение описывает функцию, локализованную вблизи  $\delta \sim \gamma_{eg}$ . Поэтому, по аналогии с (49) и (52),

эту функцию можно приближенно записать в виде простого лоренцевского контура:

$$W_{SAR}(\delta) \approx -\frac{3\sqrt{\pi}\gamma^4 \gamma_{eg} \tau^2}{4\Delta_D(1+2\gamma\tau)^2(\gamma_{eg}^2 + \delta^2)} \times \frac{I_1 I_2}{I_s^2}. \quad (70)$$

Последнее слагаемое в (63) связано с конкуренцией различных состояний КПН в центре резонанса, как это качественно описано в п.2.2. Это слагаемое имеет вид:

$$W_{interCPT}(\delta) = -\frac{\sqrt{\pi}\gamma^4 \gamma_{eg} \tau^2 \cos(\eta)}{4\Delta_D(1+2\gamma\tau)(\gamma_{eg}^2 + \delta^2)} \times \left[ \Phi_r \left( \frac{\gamma_{eg} + i\delta}{\Delta_D} \right) - \frac{\gamma_{eg}}{\delta} \Phi_i \left( \frac{\gamma_{eg} + i\delta}{\Delta_D} \right) \right] \times \frac{I_1 I_2}{I_s^2}. \quad (71)$$

Как и предыдущее слагаемое, выражение для  $W_{interCPT}$  можно приближенно записать в более простой форме, описываемой функцией Лоренца:

$$W_{interCPT}(\delta) \approx -\frac{\sqrt{\pi}\gamma^4 \gamma_{eg} \tau^2 \cos(\eta)}{4\Delta_D(1+2\gamma\tau)(\gamma_{eg}^2 + \delta^2)} \times \frac{I_1 I_2}{I_s^2}. \quad (72)$$

Из этого выражения вытекает важное следствие. А именно, как мы видели в п.2.3, в линейном режиме по пробному полю нелинейный резонанс может приобретать асимметрию при  $\eta \neq \pi n$ . В данном случае функция (72) не содержит нечетных по  $\delta$  слагаемых, в отличие от функции  $\Upsilon_{CPT}$  из (53). Это связано с тем, что в режиме стоячей волны мы рассматриваем полное поглощение поля в резонансной среде, а не поглощение какого-либо одного пучка.

Также, как и в случае с  $\Upsilon_{interCPT}$  и  $\Upsilon_{SAR}$  в п.2.3, можно легко показать, что вклад от  $W_{interCPT}$  преобладает над вкладом от  $W_{SAR}$ , что при  $\cos(\eta) < 0$  может приводить к образованию контрастного пика в поглощении среды. Действительно, по аналогии с (54) при  $\eta = \pi$  имеем:

$$\frac{W_{interCPT}}{W_{SAR}} \approx -\frac{1+2\gamma\tau}{3}. \quad (73)$$

Это выражение совпадает с (54) при  $\beta = 1$ . Отсюда следует, что при  $\gamma\tau \gg 1$ , выполняется соотношение  $|W_{interCPT}| \gg |W_{SAR}|$  между вкладами от двух нелинейных эффектов.

Далее, как и в п.2.3, проиллюстрируем графически различные вклады в общий сигнал (63). На рис. 5 представлены парциальные вклады от линейного поглощения и от различных нелинейных эффектов в населенность возбужденного уровня

$W$  при таких же параметрах, как для рис. 3. В рассматриваемом режиме стоячей волны эти параметры следует дополнить интенсивностью второго пучка:  $I_2 = I_1 = 50$  мкВт/см<sup>2</sup>. Как видно из рис. 5а, доплеровский контур линейного поглощения светового поля (штрих.) имеет амплитуду больше, чем соответствующая амплитуда суммарного резонанса (сплош.). Это является следствием проявления двух нелинейных эффектов: самонасыщения (рис. 5б, штрих.) и накачки в состоянии КПН (рис. 5б, сплош.). Причем последний эффект влияет на величину доплеровского поглощения гораздо сильнее. Центральный (субдоплеровский) резонанс на рис. 5а (сплош.) формируется в результате конкуренции двух субдоплеровских спектральных структур, изображенных на 5в. Из этого рисунка следует, что резонанс, возникающий вследствие конкуренции различных состояний КПН (сплош.) существенно больше резонанса насыщенного поглощения, что и приводит к появлению субдоплеровского резонанса в виде пика поглощения или провала в прозрачности среды, как на рис. 1 (сплош.) или на рис. 5а (сплош.).

Рис. ??а демонстрирует симметричность резонанса при фазе  $\eta \neq \pi n$  в отличие от режима пробного пучка (ср. с рис. 4а). Рис. ??б отражает эффект пространственных осцилляций амплитуды субдоплеровского резонанса при вариации фазы  $\eta$ , который был предсказан в работе [32] на основе численных расчетов и подтвержден экспериментально в работах [26,33].

### 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе построена теория и получены аналитические выражения для формы линии субдоплеровских резонансов, наблюдаемых в поле встречных бихроматических лазерных пучков. При этом, в явном виде выделены слагаемые, отвечающие за различные линейные и нелинейные эффекты в поглощении поля резонансной средой. На основе полученных формул получил теоретическое объяснение эффект высококонтрастного пика поглощения, который может быть использован для создания миниатюрных оптических стандартов частоты нового поколения. Выполнено сравнение двух режимов наблюдения субдоплеровских резонансов: режим стоячей волны и режим пробного поля. Показано, что в первом случае

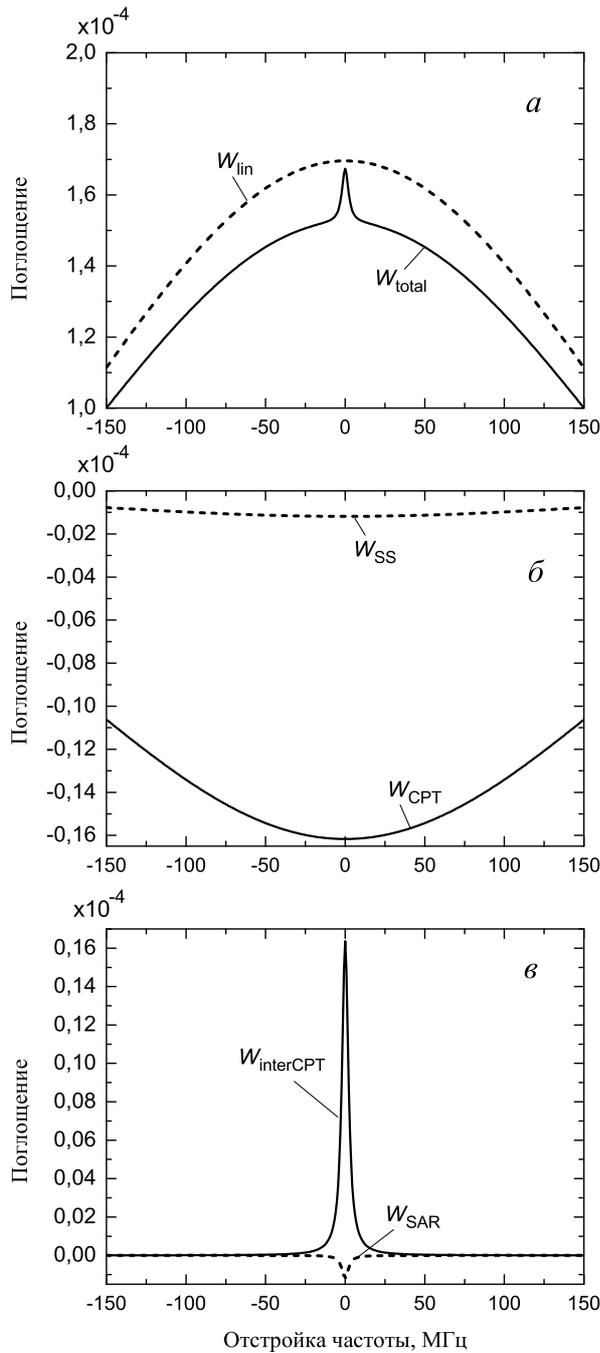
не наблюдается асимметрия нелинейного резонанса, что может явиться ключевым фактором при выборе конкретной схемы реализации оптического КСЧ. Действительно, подобного рода асимметрия резонанса может приводить к нежелательным сдвигам частоты КСЧ при ее стабилизации по субдоплеровскому резонансу методом синхронного детектирования и формирования сигнала ошибки. В таком случае асимметрия приводит к сдвигу сигнала ошибки, что может сказаться на долговременной стабильности КСЧ. В целом, полученные результаты существенно дополняют теорию высококонтрастных субдоплеровских резонансов в бихроматическом лазерном поле, ранее построенную лишь на основе численных расчетов.

**Финансирование.** Работа А.М. Михайлова и Д.В. Бражникова была поддержана грантами РНФ (17-72-20089) и РФФИ (20-02-00075). Р. Боудо благодарит за поддержку Национальное агентство научных исследований (Agence Nationale de la Recherche) в рамках проекта “LabeX FIRST-TF” (грант ANR 10-LABX-0048).

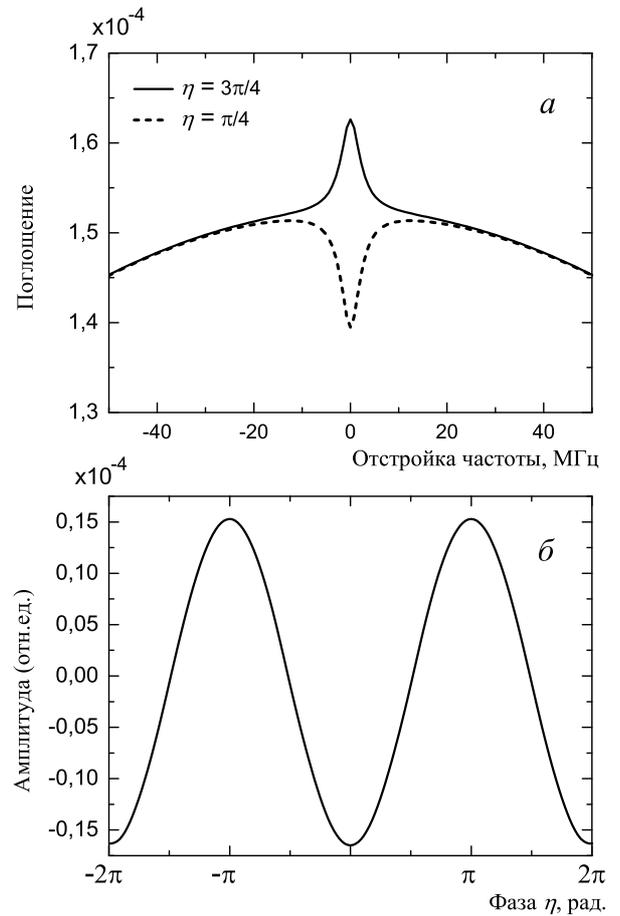
### ЛИТЕРАТУРА

1. V. S. Letokhov and V. P. Chebotayev, *Nonlinear laser spectroscopy*, Springer, Berlin (1977).
2. T. W. Hänsch, S. A. Lee, R. Wallenstein, and C. Wieman, *Phys. Rev. Lett.* **34**, 307 (1975).
3. J. L. Hall, C. J. Borde, and K. Uehara, *Phys. Rev. Lett.* **37**, 1339 (1976).
4. С. Н. Багаев и В. П. Чеботаев, Письма в ЖЭТФ **16**, 614 (1972) [S. N. Bagaev and V. P. Chebotayev, *JETP Lett.* **16**, 433 (1972)].
5. M. Takamoto et al., *Nat. Photonics* **14**, 411 (2020).
6. R. M. Godun et al., *Phys. Rev. Lett.* **113**, 210801 (2014).
7. S. Haroche and F. Hartmann, *Phys. Rev. A* **6**, 1280 (1972).
8. M. A. Gubin et al., *IEEE J. Quantum Elect.* **31**, 2177 (1995).
9. S. N. Bagayev, A. K. Dmitriyev, and P. V. Pokasov, *Laser Phys.* **7**, 989 (1997).
10. G. Galzerano, C. Svelto, A. Onae, and E. Bava, *SPIE Proc.* **4269**, 224 (2001)

11. S. M. Ignatovich et al., J. Phys. Conf. Ser. **793**, 012010 (2017).
12. C. Affolderbach and G. Miletì, Rev. Sci. Instrum. **76**, 073108 (2005).
13. N. Almat et al., IEEE T. Ultrason. Ferr. **65**, 919 (2018).
14. T. Schuldt et al., Appl. Opt. **56**, 1101 (2017).
15. V. Schkolnik et al., EPJ Quantum Technology **4**, 9 (2017).
16. G. Alzetta, A. Gozzini, L. Moi, and G. Orriols, Nuovo Cimento **36B**, 5 (1976).
17. H. Zhang et al., IEEE J. Solid-St. Circ. **54**, 3135 (2019).
18. R. Vicarini et al., IEEE T. Ultrason. Ferr. **66**, 1962 (2019).
19. М.Н. Скворцов и др., Квант. электроника **50**, 576 (2020) [M. N. Skvortsov et al., Quantum Electron. **50**, 576 (2020)].
20. C. L. Chow et al., “Overview of project SPATIUM – Space Precision Atomic-clock Timing Utility Mission”, Proceedings of the 33rd Annual AIAA/USU Conference on Small Satellites, 3–8 August 2019 (Logan, Utah, USA).
21. J. W. Conklin et al., “Preliminary results from the CHOMPTT laser time-transfer mission”, Proceedings of the 33rd Annual AIAA/USU Conference on Small Satellites, 3–8 August 2019 (Logan, Utah, USA).
22. M. T. Hummon et al., Optica **5**, 443 (2018).
23. Z. L. Newman et al., Optica **6**, 680 (2019).
24. V. Maurice, Z. Newman, S. Dickerson et al., Opt. Express **28**, 24708 (2020).
25. Z.L. Newman, V. Maurice, C. Fredrick et al., arXiv:2105.00610v1 [physics.atom-ph], 3 May 2021.
26. D. Brazhnikov, M. Petersen, G. Coget et al., Phys. Rev. A **99**, 062508 (2019).
27. M. Abdel Hafiz, G. Coget, E. De Clercq, and R. Boudot, Opt. Lett. **41**, 2982 (2016).
28. D. V. Brazhnikov, S. M. Ignatovich, I. S. Mesenzova et al., J. Phys. Conf. Ser. **1859**, 012019 (2021).
29. P. Yun et al., Phys. Rev. Appl. **7**, 014018 (2017).
30. M. Abdel Hafiz et al., J. Appl. Phys. **121**, 104903 (2017).
31. M. Zhao et al., “Laser frequency stabilization via bichromatic Doppler-free spectroscopy of  $^{87}\text{Rb}$  D<sub>1</sub> line”, Appl. Optics, accepted for publication (2021).
32. M. Abdel Hafiz et al., New J. Phys. **19**, 073028 (2017).
33. Д. В. Бражников, С. М. Игнатович, И. С. Месенцова и др., Квант. электроника **50**, 1015 (2020) [D. V. Brazhnikov, S. M. Ignatovich, I. S. Mesenzova et al., Quantum Electron. **50**, 1015 (2020)].
34. S. N. Bagayev, V. P. Chebotayev, and E. A. Titov, Laser Phys. **4**, 224 (1994).
35. E. Arimondo and G. Orriols, Lett. Nuovo Cimento **17**, 333 (1976).
36. H. R. Gray, R. M. Whitley, and C. R. Stroud, Jr., Opt. Lett. **3**, 218 (1978).
37. K.-J. Boller, A. Imamoglu, and S. E. Harris, Phys. Rev. Lett. **66**, 2593 (1991).
38. L. V. Hau, S. E. Harris, Z. Dutton, and C. H. Behroozi, Nature **397**, 594 (1999).
39. V. G. Arkhipkin and I. V. Timofeev, Phys. Rev. A **64**, 053811 (2001).
40. V. I. Yudin, M. Yu. Basalaev, D. V. Brazhnikov, and A. V. Taichenachev, Phys. Rev. A **88**, 023862 (2013).
41. D. V. Brazhnikov, A. V. Taichenachev, and V. I. Yudin, Eur. Phys. J. D **63**, 315 (2011).
42. S. G. Rautian and A. M. Shalagin, *Kinetic Problems of Nonlinear Spectroscopy*, North-Holland, Amsterdam (1991).
43. E. Arimondo, Prog. Optics **35**, 257 (1996).
44. Д. Б. Лазебный, Д. В. Бражников, А. В. Тайченачев и др., ЖЭТФ **148**, 1068 (2015) [D. B. Lazebnyi, D. V. Brazhnikov, A. V. Taichenachev et al., J. Exp. Theor. Phys. **121**, 934 (2015)].



**Рис. 5.** Различные вклады в поглощение лазерного поля: (а) линейное поглощение ( $W_{lin}$ ) и суммарный резонансный контур ( $W_{total}$ ), (б) нелинейные слагаемые от эффекта самонасыщения ( $W_{SS}$ ) и эффекта КПН от каждого из встречных пучков по-отдельности ( $W_{CPT}$ ), (в) нелинейные эффекты, возникающие при действии встречных пучков на одни и те же скоростные группы атомов в газе: резонанс насыщенного поглощения ( $W_{SAR}$ ) и резонанс, связанный с “конкуренцией” состояний КПН ( $W_{interCPT}$ ). Параметры расчета приведены в тексте.



**Рис. 6.** (а) Резонансная кривая при различных значениях фазы  $\eta$ . (б) Осцилляции амплитуды субдоплеровского резонанса при изменении фазы  $\eta$ . Параметры расчета такие же, как для рис. 5.