

# Définition d'un outil d'aide à la décision du praticien dans le traitement de chéloïdes

Optimisation de Maillage par Estimateurs d'eRreur (OMER)

N. Marie<sup>1</sup> A.E.H.<sup>2</sup> F. Chouly<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Master 2 MIGS - Mathématiques appliquées  
Université de Bourgogne - Dijon

<sup>2</sup>Département Mécanique Appliquée - Institut FEMTO-ST - UMR 6174  
Université de Franche-comté, ENSMM, UTBM, CNRS - Besançon, Belfort, Montbéliard

<sup>3</sup>Institut de Mathématiques de Bourgogne - UMR 5584  
Université de Bourgogne, CNRS - Dijon

Présentation COS DMA - 01 Octobre 2020

- 1 Vers un dispositif médical de prévention du développement des chéloïdes
- 2 Estimateurs d'erreur DWR
- 3 Application : Modèle bimatériau d'une géométrie chéloïdienne
- 4 Bilan et perspectives

- 1 Vers un dispositif médical de prévention du développement des chéloïdes
- 2 Estimateurs d'erreur DWR
- 3 Application : Modèle bimatériau d'une géométrie chéloïdienne
- 4 Bilan et perspectives



Chéloïde Thoracique  
(Ogawa, 2008)



Chéloïde d'épaule  
(Ogawa, 2008)

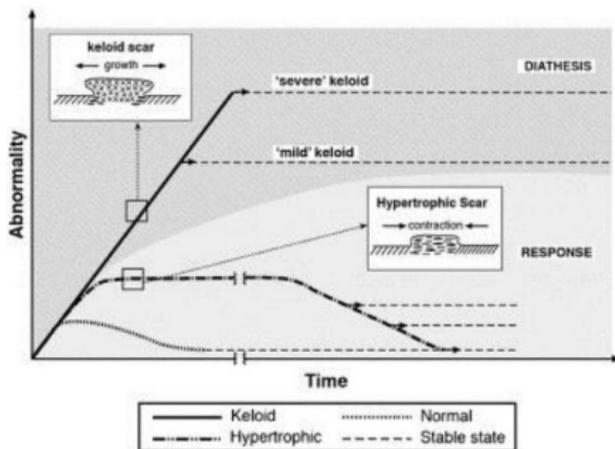


Chéloïde papillon  
(x=15mm, y=47mm)  
(Chambert et al., 2019)

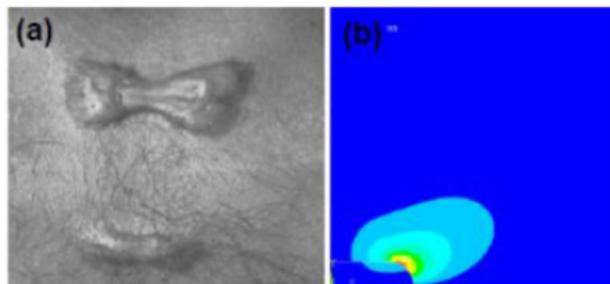


Chéloïde d'oreille  
(healthline.com/health/keloids)

Facteurs de croissance : biologique, génétique et **mécanique**



Keloid's growth (Burd, 2008)

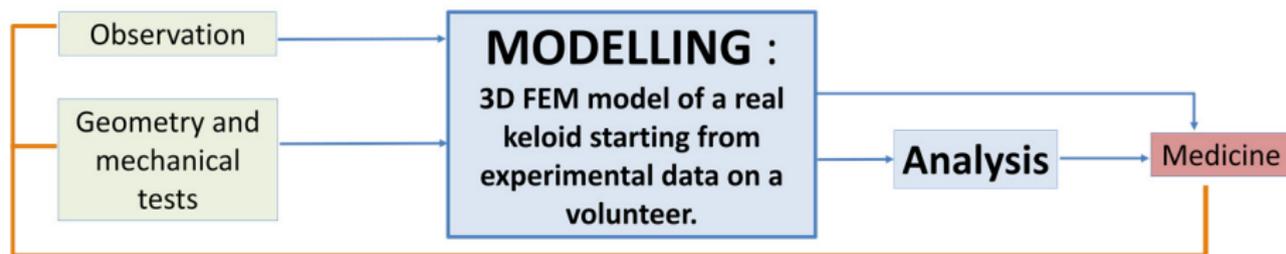


**Hyp** : Les contraintes mécaniques influent sur l'extension de la chéloïde  
**Objectif** : Prédire pour prévenir

Chéloïdes présternales et champs de contraintes de cisaillement en déformation biaxiale.  
(Chambert et al., CMBBE 2012)

→ **Cahier des charges d'un dispositif de prévention clinique**

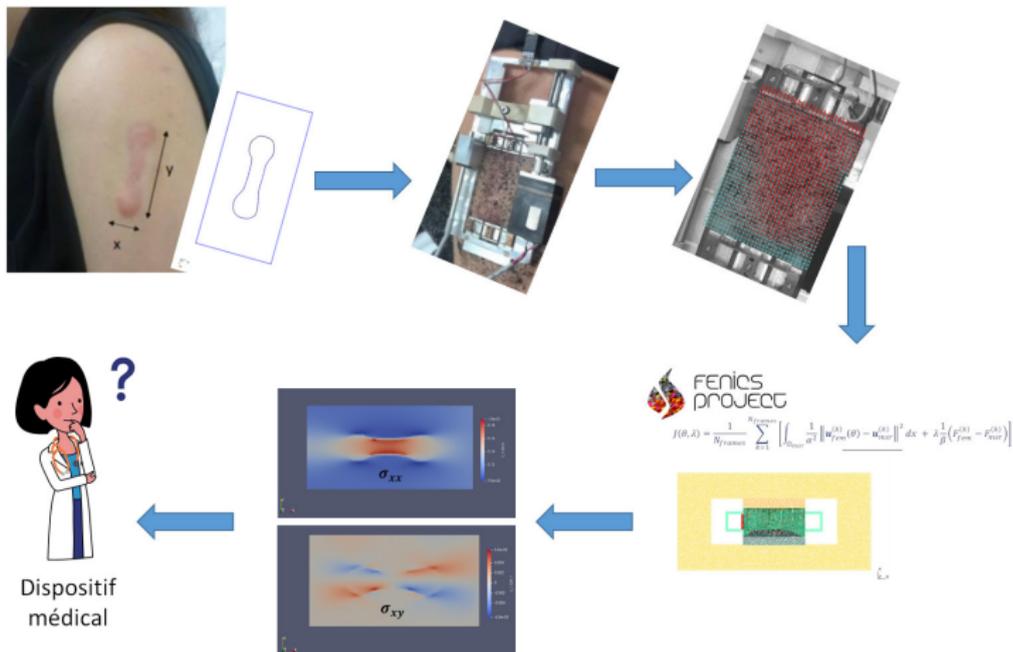
# Stratégie d'analyse du problème chéloïdien



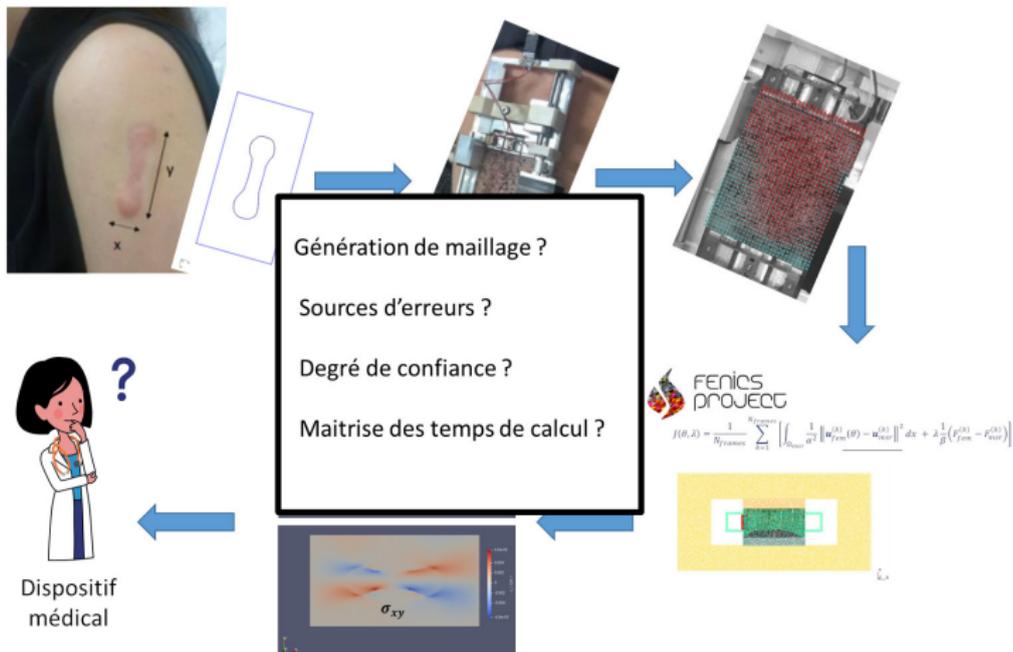
## Stratégie Pluridisciplinaire :

- La médecine (Identification d'un dysfonctionnement, recherche de remèdes)
- La biologie (Compréhension de la pathologie) – L'imagerie médicale (Développement de l'observation)
- La mécanique (Modélisation et Caractérisation mécanique).
- L'ingénierie (Développement d'un dispositif médical)

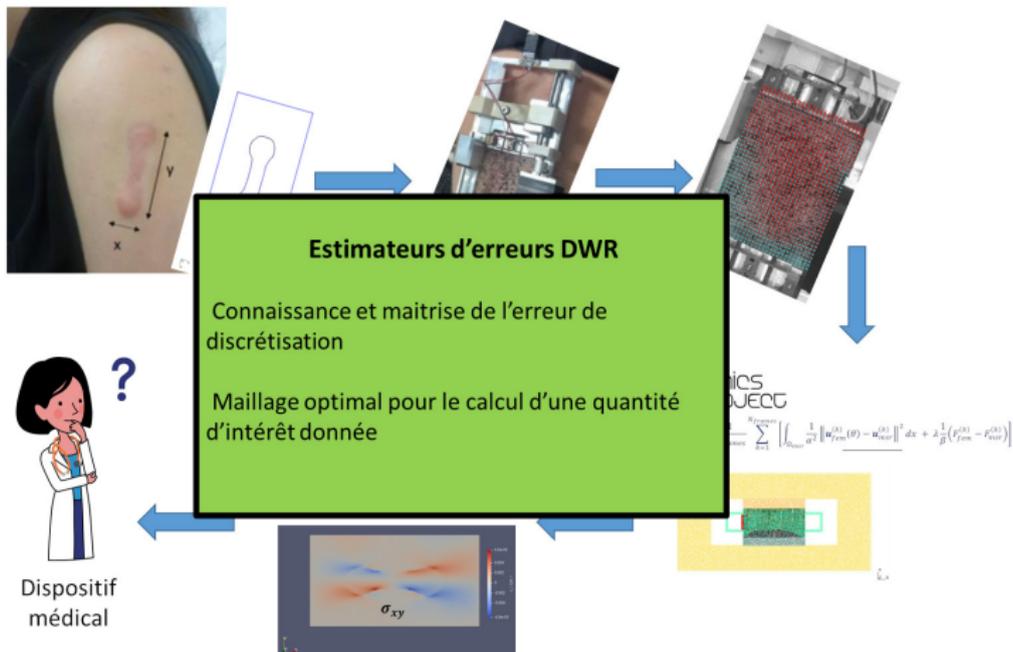
# Du patient au champ de contraintes



# Du patient au champ de contraintes



# Du patient au champ de contraintes



- 1 Vers un dispositif médical de prévention du développement des chéloïdes
- 2 Estimateurs d'erreur DWR**
- 3 Application : Modèle bimatériau d'une géométrie chéloïdienne
- 4 Bilan et perspectives

# Problème de départ

Estimer l'erreur commise dans l'approximation par éléments finis d'une fonction  $u$ , solution de l'équation d'équilibre en **élasticité linéaire**

$$\operatorname{div}(\sigma(u)) = -f$$

Erreur étudiée relativement à une **quantité d'intérêt**  $J$  fonction de  $u$

$$\text{Exemples : } J(u) = \int_{\Omega_{\text{obs}}} \operatorname{tr}(\sigma(u)) \, dx, \quad J(u) = \int_{\Omega_{\text{obs}}} \sigma_{xy}(u) \, dx$$

L'erreur s'écrit

$$|J(u) - J(u_h)|$$

(Becker & Ranacher 2001 - Rognes & Logg 2012 - Duprez et al. 2020)

# Passage par un problème variationnel

Problème de départ  $\operatorname{div}(\sigma(u)) = -f$  **équivalent** au problème variationnel :

Trouver  $u \in \mathcal{V}$  telle que

$$a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in \mathcal{V},$$

avec

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma(u) : \epsilon(v), \quad l(v) = \int_{\Omega} f \cdot v$$

**Problème primal**

# Reformulation en problème d'optimisation

La formulation variationnelle :

Trouver  $u \in \mathcal{V}$  telle que

$$a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in \mathcal{V}$$

est **équivalente** au problème d'optimisation avec contraintes :

$$\min_{v \in \mathcal{V}} J(v), \quad \text{sous les contraintes} \quad a(v, w) = l(w), \quad \forall w \in \mathcal{V}$$

Astuce utilisée pour obtenir les estimateurs d'erreur DWR

$$\min_{v \in \mathcal{V}} J(v), \quad \text{sous les contraintes} \quad a(v, w) = I(w), \quad \forall w \in \mathcal{V}$$

Résolution par la méthode du **Lagrangien** :

$$L(v, z) = J(v) + I(z) - a(v, z)$$

avec  $z$  fonction vue comme un *multiplicateur de Lagrange*

# Résolution du problème

$$L(v, z) = J(v) + I(z) - a(v, z)$$

On cherche un point stationnaire de  $L$

→ calcul de ses dérivées partielles

$$\frac{\partial L}{\partial z}(v, z)[\partial z] = I(\partial z) - a(v, \partial z) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial v}(v, z)[\partial v] = J(\partial v) - a(\partial v, z) = 0$$

# Résolution du problème d'optimisation

On a donc

$$l(z) - a(v, z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a(v, z) = l(z) \quad \textbf{Problème primal}$$

et

$$J(v) - a(v, z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a(v, z) = J(v) \quad \textbf{Problème dual}$$

→ Apparition d'un problème dual associé au problème primal :

Trouver  $z \in \mathcal{V}$  tel que

$$a(v, z) = J(v), \quad \forall v \in \mathcal{V}$$

# Estimation de l'erreur dans la quantité d'intérêt $J$

2 problèmes permettant le calcul des estimateurs de l'erreur  $|J(u) - J(u_h)|$

On a

$$\begin{aligned} |J(u) - J(u_h)| &= |a(u, z) - a(u_h, z)| && \text{(d'après problème dual)} \\ &= |l(z) - a(u_h, z)| && \text{(d'après problème primal)} \end{aligned}$$

En définissant le **résidu faible** comme  $r(z) = l(z) - a(u_h, z)$  :

$$|J(u) - J(u_h)| = |r(z)|$$

Solution  $z$  du problème dual n'est pas connue non plus en général

→ approximation par éléments finis par une fonction  $\hat{z}_h$

Avec cette solution  $\hat{z}_h$ , possibilité d'**estimer** l'erreur  $|J(u) - J(u_h)|$  :

$$|J(u) - J(u_h)| \approx |r(\hat{z}_h)|$$

**Estimateur d'erreur global :**

$$\eta_h = |r(\hat{z}_h)|$$

$$|J(u) - J(u_h)| \leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T$$

Estimateur sous forme d'une somme sur chaque élément  $T$  du maillage  $\mathcal{T}_h$

avec

$$\eta_T = \left| \int_T R_T \cdot (\hat{z}_h - i_h \hat{z}_h) + \sum_{E \in \mathcal{E}_T} \int_E R_{E,T} \cdot (\hat{z}_h - i_h \hat{z}_h) \right|$$

$R_T = f + \operatorname{div}(\sigma(u_h))$  résidu fort (*issu de l'équation d'équilibre*)

$R_{E,T}$  contribution résiduelle sur les arêtes  $E$  du bord de chaque triangle  $T$

$i_h$  interpolant de Lagrange sur l'espace d'éléments finis

$\mathcal{E}_T$  ensemble des arêtes de l'élément  $T$

$$\eta_T = \left| \int_T R_T \cdot (\hat{z}_h - i_h \hat{z}_h) + \sum_{E \in \mathcal{E}_T} \int_E R_{E,T} \cdot (\hat{z}_h - i_h \hat{z}_h) \right|$$

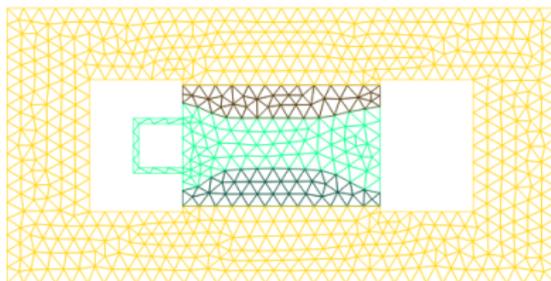
$\eta_T$  se décompose en 2 parties :

- intégrale du membre de gauche contenant une contribution résiduelle  $R_T$  (sur chaque triangle)
- somme d'intégrales du membre de droite contenant les contributions résiduelles  $R_{E,T}$  (sur chaque arête d'un triangle)

Chacun des 2 membres contenant une *pondération* issue de la solution duale approchée  $\hat{z}_h$

→ **Dual-Weighted Residual** method (**DWR**)

- 1 Vers un dispositif médical de prévention du développement des chéloïdes
- 2 Estimateurs d'erreur DWR
- 3 Application : Modèle bimatériau d'une géométrie chéloïdienne**
- 4 Bilan et perspectives



## Modèle d'élasticité linéaire

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(\sigma(u)) = 0 & \text{dans le domaine } \Omega \\ u = (0, 0) & \text{sur le patin droit} \\ u = (-0.3, 0) & \text{sur le patin gauche} \\ \sigma(u) \cdot n = (0, 0) & \text{sur le bord extérieur} \end{array} \right.$$

# Résultats

**Paramètres matériels :**  $E_k$  et  $E_h$  modules de Young resp. de la chéloïde et de la peau saine,  $E_h = 0.01$  MPa

Coefficient de Poisson  $\nu = 0.49$

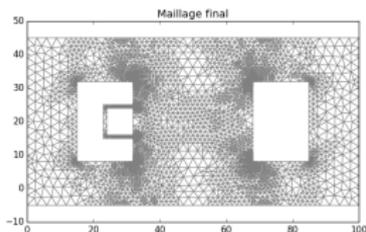


Figure: Maillage final en mono-matériau avec  $J(u) = \int_{\Omega_{obs}} tr(\sigma(u))$ ,  $E_k = E_h$

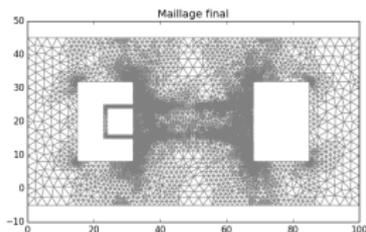


Figure: Maillage final en bi-matériau avec  $J(u) = \int_{\Omega_{obs}} tr(\sigma(u))$ ,  $E_k = 50E_h$

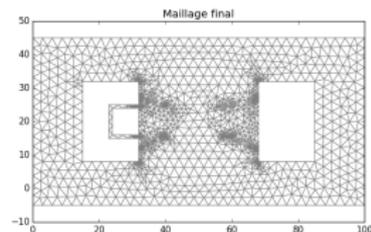


Figure: Maillage final en bi-matériau avec  $J(u) = \int_{\Omega_{obs}} \sigma_{xy}(u)$ ,  $E_k = 50E_h$

Précision de l'estimation de  $|J(u) - J(u_h)|$  :  $10^{-5}$

# Evolution du maillage au fil des itérations

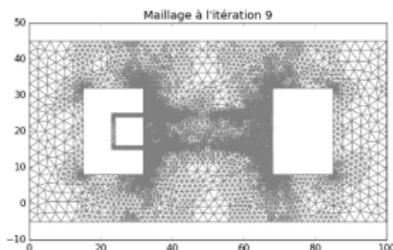
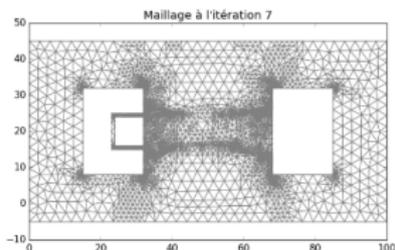
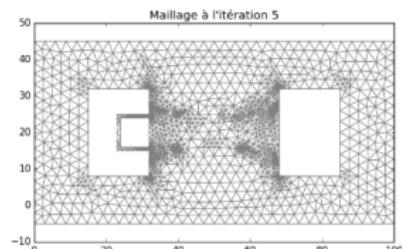
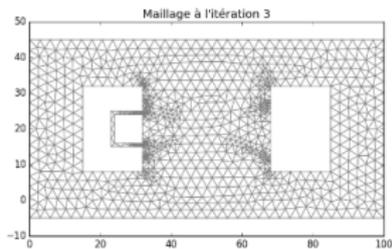
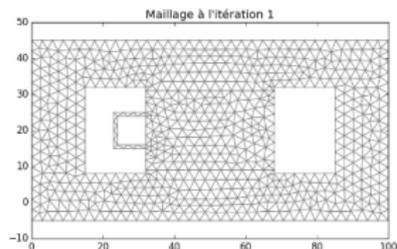


Illustration sur le 2e cas (bi-matériau avec quantité d'intérêt  $J(u) = \int_{\Omega_{obs}} tr(\sigma(u))$ )  
Maillages avec resp. 1313, 1841, 3765, 9509 et 24667 éléments

# Courbes de convergence

$$J(u) = \int \text{tr}(\sigma(u)), E_k = E_h$$

$$J(u) = \int \text{tr}(\sigma(u)), E_k = 50E_h$$

$$J(u) = \int \sigma_{xy}(u), E_k = 50E_h$$

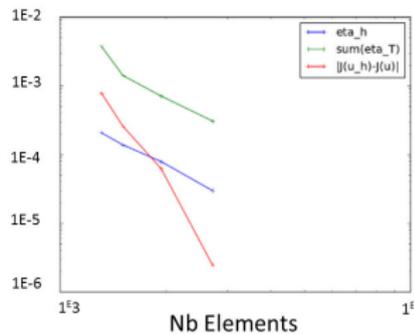
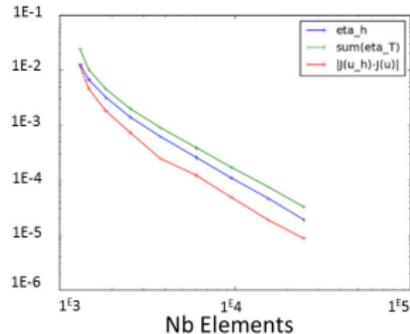
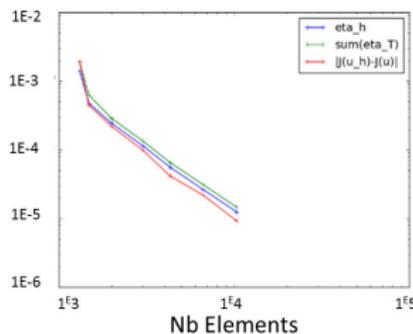
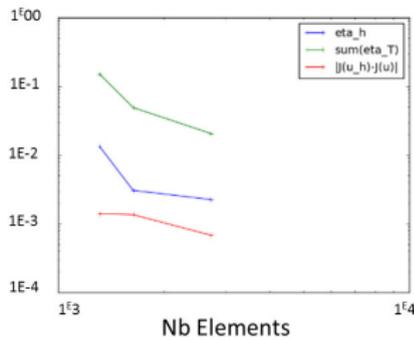
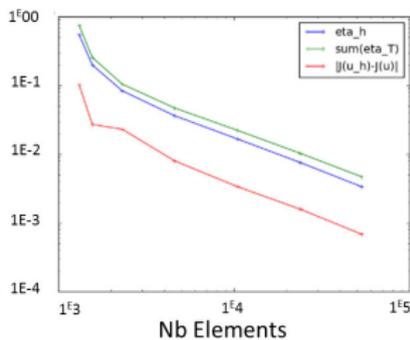
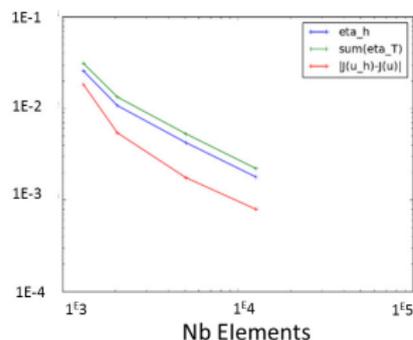


Figure: Haut : Éléments linéaires, Bas : Éléments quadratiques

- 1 Vers un dispositif médical de prévention du développement des chéloïdes
- 2 Estimateurs d'erreur DWR
- 3 Application : Modèle bimatériau d'une géométrie chéloïdienne
- 4 Bilan et perspectives

## BILAN

- 1 Utilisation d'un estimateur DWR avec un logiciel EF libre (FEniCS)
- 2 Prise en compte de conditions de Dirichlet non-homogènes
- 3 Adaptation automatique de maillage
- 4 Maîtrise de l'erreur de discrétisation sur une quantité d'intérêt
- 5 Application à une géométrie chéloïdienne bimatériau

## PERSPECTIVES

- 1 Extension aux lois hyperélastiques
- 2 Problème de contrôle optimal (Becker et al. - 2000)
- 3 Remplacement modèle bimatériau par un modèle continu (variable d'activation)