

# Décider la contextualité de configurations quantiques avec un solveur SAT\*

Axel Muller

Université de Franche-Comté, CNRS, institut FEMTO-ST, F-25000 Besançon, France  
axel.muller@femto-st.fr

## Résumé

Résumé Cet article présente mes travaux de recherche en première année de thèse, à l'institut FEMTO-ST à Besançon, sous la direction de M. Alain Giorgetti et le co-encadrement de M. Frédéric Holweck.

*Mots-clés : programme quantique, contextualité quantique, vérification formelle*

## 1 Introduction

Mes travaux portent sur la contextualité quantique. Ma thèse est financée par le projet ANR EPiQ (Étude de la Pile Quantique, ANR-22-PETQ-0007) du Plan France 2030 de l'Agence Nationale de la Recherche.

Alain Giorgetti étudie l'informatique quantique depuis 2015 [1]. Il a contribué au projet I-SITE UBFC I-QUINS (*Integrated QUantum Information at the NanoScale*, 01/02/2017-31/01/2020). De 2018 à 2021, il a dirigé la thèse d'Henri De Boutray [2], co-dirigée par Frédéric Holweck et co-encadrée par Pierre-Alain Masson, sur des évaluations calculables de l'intrication et de la contextualité quantiques, dans la perspective de leur vérification formelle [3, 4, 5].

Depuis 2012 Frédéric Holweck mène des recherches sur l'information quantique, en particulier en étudiant les ressources pour les programmes quantiques que sont l'intrication et la contextualité [6, 7, 8]. Il a notamment appliqué ces méthodes à l'algorithme quantique de Grover [9]. Il a porté le projet I-QUINS et co-encadré une thèse sur les algorithmes quantiques, dans le cadre du projet PHYFA (*Photonic platform for HYperentanglement in Frequency and its Application*), co-porté avec Jean-Marc Merolla (FEMTO-ST).

## 2 Problématique

La contextualité est un phénomène quantique qui contribue significativement à la supériorité des programmes quantiques, par rapport à leurs homologues classiques. Cependant, il reste encore beaucoup à découvrir, à comprendre et à expliquer sur la manière dont fonctionne cet avantage. La vérification formelle de programmes regroupe diverses techniques d'analyse statique ou dynamique assistées par ordinateur, qui permettent non seulement d'accroître la confiance dans le logiciel, mais aussi d'expliquer finement et rigoureusement les ressorts internes de son fonctionnement. Ces techniques et les outils correspondants sont progressivement adaptés aux programmes quantiques, mais il reste du travail à faire pour intégrer divers aspects de ce domaine.

Ce sujet de thèse propose de relever le défi de la spécification et de la vérification formelles de propriétés de programmes quantiques, et de l'automatisation de cette dernière, en se concentrant sur les propriétés liées au phénomène de contextualité quantique. Ces programmes et leurs optimisations sont

---

\*Session doctorants

assez complexes pour susciter des interrogations sur leurs bonnes propriétés, dont leur correction, leur complétude et leur complexité algorithmique, qui requièrent des justifications rigoureuses.

Concernant la contextualité, quelques propriétés sont connues, mais elles ont souvent été obtenues soit par des calculs mathématiques manuels, soit par des calculs automatisés pour un petit nombre de bits quantiques. Nous proposons d’assister la vérification de ces propriétés, et la découverte d’autres propriétés analogues, notamment à l’aide de logiciels d’aide à la preuve, tels que Why3 [10] ou Coq [11], afin d’établir ces propriétés avec certitude et quel que soit le nombre de bits quantiques.

Ce défi sera relevé grâce à des adaptations aux propriétés quantiques des techniques de preuve formelle et de test automatique, fondées sur les recherches actuelles en vérification des programmes quantiques. Une attention particulière sera portée sur les caractérisations de la contextualité fondées sur les géométries finies contextuelles [4, 12].

### 3 Résultats

Mon premier travail publié a porté sur les doilies à  $N$  qubits [13]. Pour  $N \geq 2$ , un doily à  $N$  qubits est un doily existant dans l’espace polaire symplectique à  $N$  qubits. Ces doilies sont liés aux preuves de contextualité quantique basées sur les opérateurs. En suivant et la stratégie de Saniga et al. [4], qui s’est concentrée exclusivement sur les doilies à trois qubits, nous avons trouvé plusieurs formules donnant le nombre de doilies linéaires et quadratiques pour tout  $N > 2$ . Ensuite, nous avons conçu un algorithme efficace pour la génération de tous les doilies à  $N$  qubits. En utilisant cet algorithme pour  $N = 4$  et  $N = 5$ , nous avons fourni une classification des doilies à  $N$  qubits en termes de types d’observables qu’ils présentent et de nombre de lignes négatives dont ils sont dotés. Nous avons énuméré plusieurs résultats remarquables sur les doilies à  $N$  qubits, ainsi que quelques caractéristiques spécifiques exhibées par les doilies linéaires. Enfin, nous avons décrit quelques extensions potentielles des doilies linéaires, ainsi que quelques extensions potentielles de notre approche.

Plus récemment, j’ai conçu des algorithmes et un code C pour décider de la contextualité quantique et évaluer le degré de contextualité (une façon de quantifier la contextualité) pour une variété de géométries points-lignes situées dans des espaces polaires symplectiques binaires de petit rang. Grâce à ce code, nous avons pu non seulement reproduire, de manière plus efficace, tous les résultats d’un article récent de Boutray et al. [12], mais nous avons aussi obtenu un certain nombre de nouveaux résultats [14]. Cet article en cours de révision décrit d’abord les algorithmes, le code C et son interfaçage avec un solveur SAT [15]. Des résultats numériques illustrent ensuite la puissance de cette approche, sur un certain nombre de sous-espaces d’espaces polaires symplectiques dont le rang varie de deux à sept. Les nouveaux résultats principaux sont (i) la non-contextualité des configurations dont les contextes sont des sous-espaces de dimension deux et plus, (ii) la non-existence de sous-espaces négatifs de dimension trois et plus, (iii) des bornes considérablement améliorées pour le degré de contextualité des quadriques elliptiques et hyperboliques pour le rang 4, ainsi que pour une sous-géométrie particulière de l’espace à trois qubits dont les contextes sont les lignes de cet espace, (iv) la preuve de la non-contextualité des perpsets, et enfin et surtout, (v) la nature contextuelle d’une sous-géométrie distinguée d’un doily multi-qubit, appelée *two-spread*, et le calcul de son degré de contextualité.

Il n’est pas aisé d’expliquer à la communauté scientifique des concepts quantiques comme la contextualité, et nos approches formelles pour automatiser sa vérification. C’est pourquoi je propose de présenter, lors des journées 2023 du GDR GPL, en complément de ce résumé, un poster de vulgarisation sur l’utilisation d’un solveur SAT pour détecter la contextualité de configurations quantiques.

## Remerciements

Ce projet est soutenu par le projet EPiQ ANR-22-PETQ-0007 du PEPR technologies quantiques dans le cadre du Plan France 2030, et par l'EIPHI Graduate School (contrat ANR-17-EURE-0002).

## Références

- [1] M. PLANAT et al. “Quantum contextual finite geometries from dessins d’enfants”. In : *Int. J. of Geometric Methods in Modern Physics* (avr. 2015). World Scientific Publishing. DOI : 10 . 1142/S021988781550067X.
- [2] H. DE BOUTRAY. “Computational studies of entanglement and quantum contextuality properties towards their formal verification”. <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-03529916>. Theses. Université de Franche-Comté, déc. 2021.
- [3] H. de BOUTRAY et al. “Mermin polynomials for non-locality and entanglement detection in Grover’s algorithm and Quantum Fourier Transform”. In : *Quantum Information Processing 20.3* (mars 2021). ISSN : 1573-1332. DOI : 10 . 1007/s11128-020-02976-z.
- [4] M. SANIGA et al. “Taxonomy of Polar Subspaces of Multi-Qubit Symplectic Polar Spaces of Small Rank”. en. In : *Mathematics 9.18* (sept. 2021). Number: 18 Publisher: Multidisciplinary Digital Publishing Institute, p. 2272. DOI : 10 . 3390/math9182272.
- [5] H. DE BOUTRAY et al. “Automated detection of contextuality proofs with intermediate numbers of observables”. In : *18th International Conference on Quantum Physics and Logic (QPL 2021)*. Gdańsk, Poland, juin 2021, p. 3.
- [6] F. HOLWECK, J.-G. LUQUE et J.-Y. THIBON. “Geometric descriptions of entangled states by auxiliary varieties”. In : *Journal of Mathematical Physics 53.10* (oct. 2012). Publisher: American Institute of Physics, p. 102203. ISSN : 0022-2488. DOI : 10 . 1063/1 . 4753989.
- [7] P. LÉVAY et F. HOLWECK. “Embedding qubits into fermionic Fock space: Peculiarities of the four-qubit case”. In : *Physical Review D 91.12* (juin 2015). Publisher: American Physical Society, p. 125029. DOI : 10 . 1103/PhysRevD . 91 . 125029.
- [8] P. LÉVAY, F. HOLWECK et M. SANIGA. “Magic three-qubit Veldkamp line: A finite geometric underpinning for form theories of gravity and black hole entropy”. In : *Physical Review D 96.2* (juill. 2017). Publisher: American Physical Society, p. 026018. DOI : 10 . 1103/PhysRevD . 96 . 026018.
- [9] F. HOLWECK, H. JAFFALI et I. NOUNOUH. “Grover’s algorithm and the secant varieties”. In : *Quantum Information Processing 15.11* (nov. 2016), p. 4391-4413. DOI : 10 . 1007/s11128-016-1445-2.
- [10] F. BOBOT et al. *The Why3 Platform*. <http://why3.lri.fr/manual.pdf>. 2018.
- [11] *The Coq Proof Assistant*. <http://coq.inria.fr>. 1989.
- [12] H. DE BOUTRAY et al. “Contextuality degree of quadrics in multi-qubit symplectic polar spaces”. In : *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 55.47* (nov. 2022), p. 475301. DOI : 10 . 1088/1751-8121/aca36f.
- [13] A. MULLER et al. “Multi-qubit doilies: Enumeration for all ranks and classification for ranks four and five”. In : *Journal of Computational Science 64* (oct. 2022), p. 101853. DOI : 10 . 1016/j . jocs . 2022 . 101853.
- [14] A. MULLER et al. *New and improved bounds on the contextuality degree of multi-qubit configurations*. Mai 2023. DOI : 10 . 48550/arXiv . 2305 . 10225.

- [15] M. S. CHOWDHURY, M. MÜLLER et J. YOU. *A Deep Dive into Conflict Generating Decisions*. en. Mai 2021. DOI : 10.48550/arXiv.2105.04595.