

Modèle thermique de transformateur ferroviaire sous différentes conditions thermiques et électriques.

Thermal modelisation of a railway power transformer under different thermal and electrical conditions.

Anthony WASSERMANN^{1,2}, Philippe BAUCOUR^{1*}, Dimitri BONNET¹, Didier CHAMAGNE¹, Brice JONCKHEERE², Dimitri MANTEL²

¹ Université Marie et Louis Pasteur (UMLP), CNRS , Institut FEMTO-ST, 90000 Belfort, France

² Direction Générale Industrielle et Ingénierie, Direction Technique, Département Traction Électrique 93574 La Plaine Saint Denis, France

*(auteur correspondant : philippe.baucour@univ-fcomte.fr)

Résumé - Les transformateurs de traction électrique utilisés pour l'alimentation des trains sont soumis à des appels de charges importants et non réguliers (pic de courant au passage du train). La sollicitation électrique et la fréquence d'utilisation des transformateurs dépendent de leurs localisations. Chaque transformateur est soumis à des contraintes différentes. Ces contraintes se traduisent par un échauffement par effet Joule, induisant un vieillissement accéléré et un risque potentiel d'incendie. Cette étude porte sur la modélisation nodale 2D thermique des transformateurs immergés dans de l'huile naturelle, avec pour objectif un dimensionnement optimal en termes de longévité et de coût.

Abstract - The railway power transformers used for powering trains are subject to significant and irregular load demands (current spikes when the train passes). Located along the tracks, they impose constraints in terms of electrical stress and therefore use frequency. This results in heating due to the Joule effect, leading to accelerated aging and a potential fire hazard. This study focuses on the 2D thermal nodal modeling of transformers immersed in natural oil, with the aim of achieving optimal design in terms of longevity and cost.

Nomenclature

T	Température, °C	k	Conductivité thermique, $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$
Q	Source de chaleur, W	h	Coefficient de convection, $\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$
G	Conductance thermique, W.K^{-1}	P	Puissance thermique, W
ρ	Masse volumique, kg.m^{-3}	e	Épaisseur, m
V	Volume, m^3	M	Somme des conductances, W.K^{-1}
C_p	Capacité thermique massique, $\text{J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$	U	Coefficient d'échange global, W.K^{-1}
S	Surface d'échange, m^2		
t	Temps, s		

1. Introduction

Dans le domaine ferroviaire, les transformateurs électriques sont utilisés pour alimenter les lignes de train. Suivant leurs localisations, les trains peuvent être alimentés jusqu'à 25 kV alternatif monophasé ou 1,5 kV continu. Cependant, ces transformateurs à huile ont une durée de vie dépendante de leurs utilisations et de l'échauffement produit lors de l'alimentation des lignes à chaque passage de train. Actuellement, les normes IEC 60076 [1] sont utilisées pour le dimensionnement en se basant sur une utilisation en pleine charge, stratifiant les niveaux de température dans l'huile. Cependant, cette méthode n'est pas adaptée au domaine ferroviaire qui engendre des appels de charge intenses et brefs, cadencés par le passage de trains. Les transformateurs utilisés peuvent alors être surdimensionnés, générant des coûts d'entretien importants et avoir une mauvaise connaissance des points chauds.

C'est dans cette optique d'utilisation que la modélisation de l'échauffement des transformateurs est nécessaire. Elle peut être réalisée de manière classique via un outil de modélisation tel que ANSYS Fluent. Cela nécessite l'utilisation d'un maillage très fin [2] résultant en un temps de calcul élevé. L'intérêt d'utiliser une approche nodale est de décomposer un système en plusieurs nœuds, représentant des éléments volumiques, sous différentes conditions (physiques, thermiques, mécaniques) réduisant les itérations et le temps de calcul. A l'origine, la méthode nodale est utilisée en électricité en se basant sur la loi de Kirchhoff [3] affirmant que la somme des intensités entrantes et sortantes d'un nœud est nulle. C'est à partir des années 1970 [4] que cette méthodologie est utilisée pour la thermique en utilisant l'analogie électrique.

2. Développement d'un modèle simplifié, la méthode nodale

La modélisation nodale repose sur l'étude des bilans thermiques de chaque nœud au cours du temps. Ainsi, pour un nœud (noté i) connecté à ses voisins (noté j), nous retrouvons le bilan de l'équation (1) :

$$\sum_{j=1}^n G_{ij} \cdot (T_j - T_i) + Q_i = \rho_i V_i \cdot C p_i \cdot \frac{\partial T_i}{\partial t} \quad (1)$$

C'est grâce à ce système d'équations simple que le temps de calcul d'un réseau nodal est inférieur à celui d'un modèle CFD. Le système nodal est réalisé en décomposant le modèle en plusieurs volumes représentés par des nœuds. Leurs tailles, masses et types sont indépendants et interagissent entre eux via des liaisons. Ces interactions sont étudiées à l'aide de la théorie des graphes. Cette théorie, reliant mathématique et informatique [5], permet de modéliser des relations ou des connexions entre différents objets dans le but de réaliser un graphe comprenant des nœuds et des liens.

Dans cette première étude, le transformateur est représenté schématiquement suivant une coupe transversale (Figure 1), de manière à simplifier la création des régions. En fonction de la géométrie et des matériaux, il est possible de distinguer 5 régions différentes et continues : une région représentant le noyau magnétique en fer doux, deux régions "cuivre" issues des bobines primaire et secondaire, une région "huile" dans laquelle est plongé l'ensemble noyaux et bobines et enfin, une région "acier" servant à contenir l'huile.

Avec cette représentation, l'enveloppe en acier interagit uniquement avec l'huile, alors que cette dernière est en contact physique avec toutes les autres régions. De même, le noyau magnétique interagit avec les régions cuivre, mais les régions cuivre n'interagissent pas entre elles.

Ces interactions peuvent être alors présentées sous forme de graphe (Figure 2). Dans ce cas, chaque nœud représente une région et chaque lien représente une interaction physique.

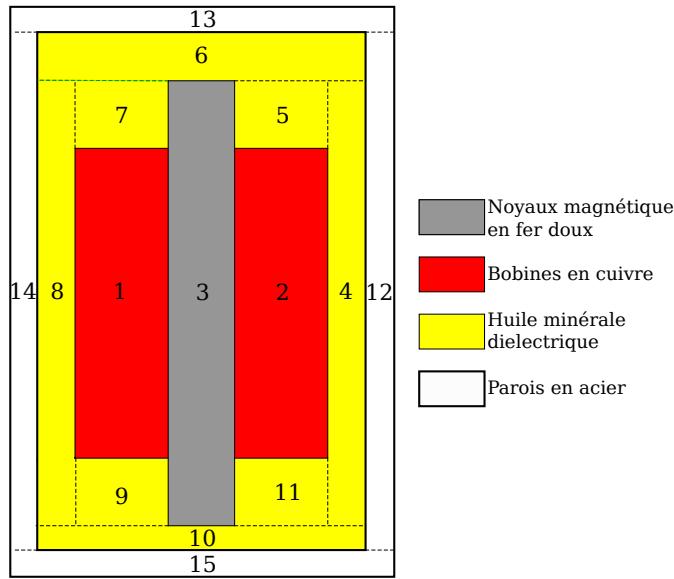


Figure 1 : Schéma d'un transformateur à bain d'huile avec la décomposition de la région "huile".

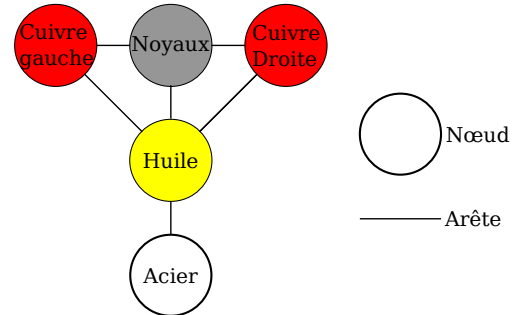


Figure 2 : Interaction entre les régions d'un transformateur à bain d'huile.

Chacune de ces régions est à nouveau découpée en nœuds dans le but de réaliser un maillage. Ce dernier est un maillage quadrilatère non structuré, permettant d'affiner plus ou moins les mailles. Chaque nœud représente un volume homogène en température et en composition. Afin de connaître le gradient de température opérant dans une région, ces nœuds interagissent entre eux via des arêtes, modélisant les flux de transfert opérant entre deux nœuds. Dans cet article, seule la conduction et la convection sont prises en compte. Le rayonnement est négligé et les mouvements convectifs ne sont pas pris en compte.

2.1. Définitions des conditions limites

La conduction est réalisée à l'aide de la loi de Fourier, représentant les transferts occurrents entre deux nœuds solides. Dans le but d'obtenir le bilan d'un nœud (équation (1)), la quantité de chaleur émise est fonction de la somme des flux occurrents sur ce nœud.

Les transferts thermiques via la convection se basent sur la loi de Newton, étant similaire à la loi de Fourier (une conductance G fonction d'une différence de température ΔT), l'ajout d'une convection se fait en ajoutant le flux convectif au bilan thermique. En définissant une température ambiante T_∞ , il est alors possible d'imposer une condition de Cauchy.

La loi de Newton permet également l'imposition d'une condition de Dirichlet. Pour ce faire, le coefficient de convection h est supposé infini, impliquant une transmission quasi instantanée de la température ambiante T_∞ . La température de surface T_S devient égale à la température ambiante.

Lors de leurs utilisations, les transformateurs sont soumis à un courant électrique induisant de l'effet Joule. Ce phénomène, localisé dans les bobines, est la principale source de chaleur provoquant leurs échauffements. L'imposition d'une source de chaleur est prise en compte directement par le bilan thermique (équation (1)) à l'aide du terme source Q .

Du fait que cette puissance thermique est directement appliquée sur un nœud, sa quantité est

dépendante de la géométrie. De fait, une région considérée comme «source» peut être soumise à une densité de flux impliquant une distribution dépendante de la surface occupée par chaque nœud.

Il est alors possible d'imposer une source uniquement à un nœud ou à un groupe de nœuds, indépendamment de la région. L'influence d'un flux radiatif externe peut être modélisée en imposant une puissance thermique aux nœuds considérés comme paroi de notre système. En connaissant la densité de ce flux thermique surfacique ainsi que la surface des parois soumises au rayonnement, la puissance de l'échauffement est quantifiable et permet de répondre aux conditions de Neumann. De plus, si une paroi est considérée comme source et est soumise à un flux radiatif, le terme source Q de l'équation bilan est égal à la somme de la puissance émise Q_e et de la puissance d'absorption Q_a du nœud.

2.2. Résolution matricielle

La réalisation d'un bilan thermique peut se calculer de façon linéaire à l'aide de l'équation (1), mais également sous forme matricielle (équation (2)). En regardant toutes les équations de tous les nœuds, nous pouvons isoler les coefficients de conduction de la température. La somme des conductions se retrouve dans une matrice de conductance m et la température, dans un vecteur de température $\vec{T}$.

$$\sum_{j=1}^n G_{ij} \cdot (T_j - T_i) = \underbrace{[\sum_{j=0}^{n_0} G_{0,j}]}_{m_{0,j}} \cdots \underbrace{\sum_{j=1}^{n_n} G_{n,j}}_{m_{n,j}} \times \begin{bmatrix} T_0 \\ \vdots \\ T_n \end{bmatrix} = M \times \vec{T} \quad (2)$$

De manière concrète et dans le but d'utiliser une décomposition nodale répertoriant les différents types de transfert et de sources thermiques déterminés précédemment, un solide 2D est découpé en 6 nœuds distincts et est soumis à des flux radiatifs et convectifs (Figure (3)). Le rayonnement est considéré comme sources de chaleur Q des nœuds d'une paroi, et la convection est réalisée sur la paroi opposée à l'aide d'une température ambiante T_∞ et des conductances convectives G_{bnd} .

Le nœud bnd est à différencier des autres nœuds n car il est uniquement utilisé pour ajouter de la convection lors des calculs de bilan thermique réalisés sur ses nœuds voisins (un nœud est voisin d'un autre s'ils sont directement liés). Il ne possède pas de source thermique interne et aucun bilan n'y est réalisé.

Le système d'équations linéaires (3) est la représentation matricielle de la Figure 3. À l'aide des conditions limites déterminées dans la section 2.1, il est possible de quantifier la matrice des conductances m_{ij} et le vecteur des sources thermiques $\vec{Q}$ mais dans le vecteur regroupant toutes les températures du système, uniquement la température ambiante T_∞ est connue (du fait que le nœud bnd soit utilisé pour l'imposition d'une condition de Cauchy, sa température T_{bnd} est égale à T_∞). Sous cette forme, il est impossible de résoudre directement le système. Il est donc nécessaire d'isoler les températures de chaque nœud i dans un second vecteur $\vec{T}_i$.

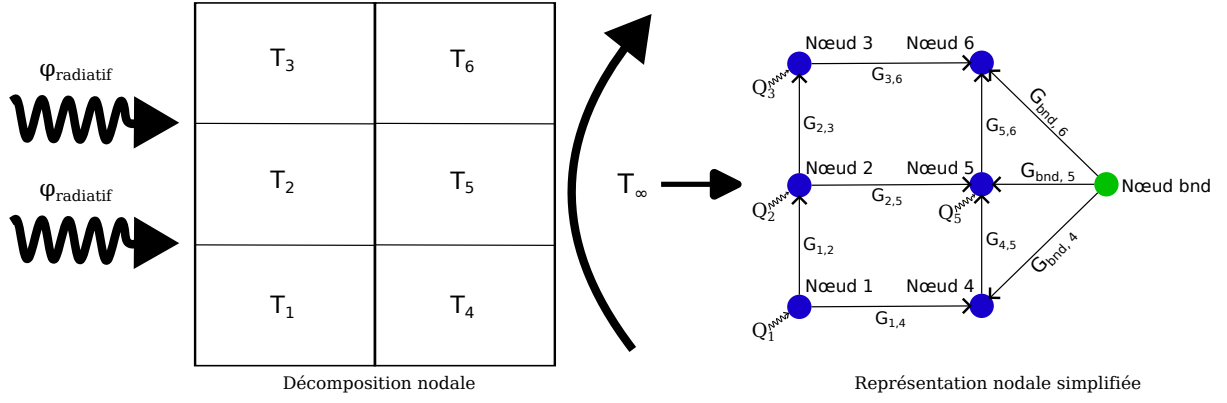


Figure 3 : Modélisation nodale d'un solide 2D soumis aux conditions de Cauchy, de Dirichlet, de Neumann et possédant une source de chaleur.

$$\begin{matrix} & n_i & \cdots & n_6 & n_{bnd} \\ n_i & \begin{bmatrix} m_{ij} & \cdots & n_6 & m_{bnd,j} \end{bmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n_6 & \begin{bmatrix} T_i \\ \vdots \\ T_{bnd} \end{bmatrix} \end{matrix} \times \begin{bmatrix} T_i \\ \vdots \\ T_{bnd} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Dans les travaux de recherche de Petitgirard [6, 7] et dans l'article de conférence de Nguyen [8], ils isolent les lignes inconnues (T_i) du vecteur température, avec les colonnes correspondantes ($m_{i,j}$) de la matrice des conductances. Le système obtenu (4) se compose alors de deux produits matriciels, l'un est formé avec les températures inconnues des nœuds du solide (bleu), et l'autre avec les températures définies à l'aide des conditions limites (vert). Sachant que seul le vecteur $\vec{T}_i$ (bleu) est inconnu, le système est solvable.

$$\begin{matrix} & n_i & \cdots & n_6 \\ n_i & \begin{bmatrix} m_{ij} & \cdots & n_6 \end{bmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_6 & \begin{bmatrix} T_i \\ \vdots \\ T_{bnd} \end{bmatrix} \end{matrix} \times \begin{bmatrix} T_i \\ \vdots \\ T_{bnd} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} Q_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m_{bnd,j} \\ \vdots \\ T_{bnd} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_i \\ \vdots \\ T_{bnd} \end{bmatrix} \quad (4)$$

3. Modèle nodal 2D d'un transformateur

Dans cette étude, un transformateur de 7300 kVA a été choisi comme modèle. Le système modélisé est le même que celui de la Figure (1), mais en modifiant les dimensions. Il a fallu dans un premier temps créer les objets qui composent ce transformateur, c.-à-d. le fer, le cuivre, l'huile et l'acier. Le fer et le cuivre sont des graphes simples rectangulaires, de plus du fait de leurs géométries et leurs conditions, les régions "cuivre gauche" et "cuivre droit" sont issues du même objet "cuivre". Elles sont toutes deux composées de 3×10 nœuds et sont considérées

Matériaux	Cuivre	Fer doux	Huile diélectrique	Acier S235
Conductivité thermique ($W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$)	401	83	60	50
Maillage	1 : 9×3 2 : 9×3	3 : 11×3	4 : 2×9 5 : 3×2 6 : 9×3 7 : 3×2 8 : 2×9 9 : 3×2 10 : 9×2 11 : 3×2	12 : 1×14 13 : 9×1 14 : 1×14 15 : 9×1
Syntaxe n° région : $n_x \times n_y$				
Nombre de noeuds	54	33	105	46
Source de chaleur (kW)	2×660	0	0	46

Tableau 1 : *Tableau des caractéristiques physiques des régions*

comme source de chaleur, dues à l'effet Joule. Cette modélisation se base sur la programmation orientée objet, un objet peut être utilisé ou dupliqué pour interagir avec d'autres objets. Dans notre cas, il est possible de lier des objets uniquement si leurs nœuds coïncident. La création de ces liaisons peut se faire soit en imposant une résistance thermique nulle, soit en imposant une résistance de contact qui permettrait la modélisation d'une interface ou d'un solide très fin.

La principale difficulté réside dans la construction du graphe de l'huile, car celui-ci n'est pas entièrement rempli. Ce vide est essentiel pour permettre l'interconnexion des régions "cuivre" et "fer". Afin de garantir la continuité des nœuds, leur suppression n'est pas envisageable, rendant ainsi nécessaire la création de la région "huile". L'un des avantages de cette approche est qu'elle permet de générer des régions aux formes complexes en assemblant plusieurs régions élémentaires de formes simples. Par conséquent, l'huile, constituée d'un regroupement de huit régions (cf : Figure (1)), ainsi que les parois en acier, issues de la fusion de quatre régions, peuvent interagir à la fois avec des graphes simples et entre elles.

Les informations nécessaires à la création du modèle sont répertoriées dans le Tableau (1). Les conductivités thermiques du cuivre et du fer ont été déterminées à l'aide des documents [9, 10, 11]. Cependant, l'huile référencée est celle fournie par la société ISTpure [12] informant que sa conductivité thermique est d'environ de $0,15 W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ à $60^\circ C$. Comme nous sommes à des valeurs de température dépassant les $800^\circ C$, nous avons décidé de lui attribuer une conductivité de $60 W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ afin de compenser les effets convectifs. Ces derniers ne peuvent donc pas être négligés.

Maintenant que le modèle du transformateur a été créé, il est nécessaire de lui imposer des conditions limites. Comme dit précédemment, les régions "cuivre" possèdent des sources de chaleur internes issues de l'effet Joule et dues au fonctionnement du transformateur. D'après les normes IEC60076 [1], les transformateurs doivent pouvoir délivrer leur puissance nominale en régime permanent. Pour cette modélisation, la puissance produite par l'échauffement des régions "cuivres" est fixée à 1,32 MW.

Dans un but de simplification, le modèle sera uniquement soumis aux conditions limites de Cauchy imposant une température ambiante de $25^\circ C$ transmise aux parois via la convection naturelle pour les faces haut et bas et forcée pour les faces gauche et droite. De plus, ces dernières possèdent des ailettes, c'est pour cela que lors de la modélisation le coefficient d'échange ap-

parent U est directement utilisé comme conductance. Il y a 16 ailettes soit 32 faces au contact d'une convection forcée de $80 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ de part et d'autre du transformateur soit un coefficient U égal à $16,5 \times 10^3 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1}$.

L'ensemble des conditions de modélisation se retrouve dans le tableau 2

Parois	Haute	Basse	Gauche	Droite
Température (°C)	25	15	25	25
Coefficient de convection thermique h ($\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$)	10	10		
Coefficient d'échange apparent U ($\text{kW} \cdot \text{K}^{-1}$)			16,5	16,5

Tableau 2 : *Tableau des conditions limites*

La réalisation de la matrice des conductances M du système d'équations linéaires (5) se fait à l'aide de l'outil Python NetworkX [13]. Nous obtenons une matrice symétrique possédant sur sa trace l'ensemble de ses régions et sur la partie supérieure (ou inférieure) leurs interactions, c'est-à-dire qu'il y a autant de matrices $M^{i,j}$ que d'arêtes (Figure (2)). L'avantage de cette méthode est que cette matrice sera toujours diagonale et symétrique, permettant l'utilisation d'une méthode de résolution de matrice creuse. Le système linéaire (5) est de la forme $A \cdot \vec{X} = \vec{B}$, le vecteur $\vec{B}$ est constitué des conditions limites dans lequel nous retrouvons les sources de chaleur uniquement appliquées aux régions cuivre mais aussi, l'ensemble des termes convectif (bnd) (issu des conditions de Cauchy) uniquement appliqués aux parois en acier du modèle.

$$\begin{array}{l}
 \begin{matrix}
 1 : \text{Cuivre gauche} \\
 2 : \text{Noyaux} \\
 3 : \text{Cuivre droite} \\
 4 : \text{Huile} \\
 5 : \text{Acier}
 \end{matrix}
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 M^{1,1} & M^{1,2} & & M^{1,4} & \\
 M^{2,1} & M^{2,2} & M^{2,3} & M^{2,4} & \\
 & M^{3,2} & M^{3,3} & M^{3,4} & \\
 M^{4,1} & M^{4,2} & M^{4,3} & M^{4,4} & M^{4,5} \\
 & & & M^{5,4} & M^{5,5}
 \end{bmatrix}
 \times
 \begin{bmatrix}
 T^1 \\
 T^2 \\
 T^3 \\
 T^4 \\
 T^5
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 -Q^1 \\
 0 \\
 -Q^3 \\
 0 \\
 M^{bnd,5} \cdot T^{bnd}
 \end{bmatrix}
 \quad (5)$$

La résolution est faite à l'aide de la bibliothèque Python Scipy [14] utilisant une méthode de résolution de matrice creuse. Dans le but d'étudier l'influence de la taille du transformateur de 7300 kVA, une première modélisation est réalisée avec les descriptions précédentes (Figure 4), et une deuxième, avec un transformateur moitié moins grand (Figure 5). Le nombre de nœuds, la résistance électrique et la puissance d'échauffement sont identiques mais la hauteur devient 0,95 m et le coefficient d'échange apparent U devient $8,25 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1}$ à la place de $16,5 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1}$ car les surfaces gauche et droite sont réduites de moitié, impliquant une réduction de la surface des ailettes.

Pour les deux modélisations (Figures 4, représentant le transformateur de 1,9 m de haut et Figures 5, représentant le transformateur de 0,95 m de haut), les parois gauche et droite, soumises aux ailettes, arrivent à maintenir leurs températures à 25°C malgré la différence de surface soumise à convection. Les températures maximales des modélisations se retrouvent aux interfaces entre le cuivre et l'acier et non au centre des régions "cuivre". La conduction réalisée par le noyau de fer est alors assez importante pour que les 2 sources interagissent entre elles. Dans cette configuration, le point chaud (HSP en anglais, que l'on retrouve dans les normes

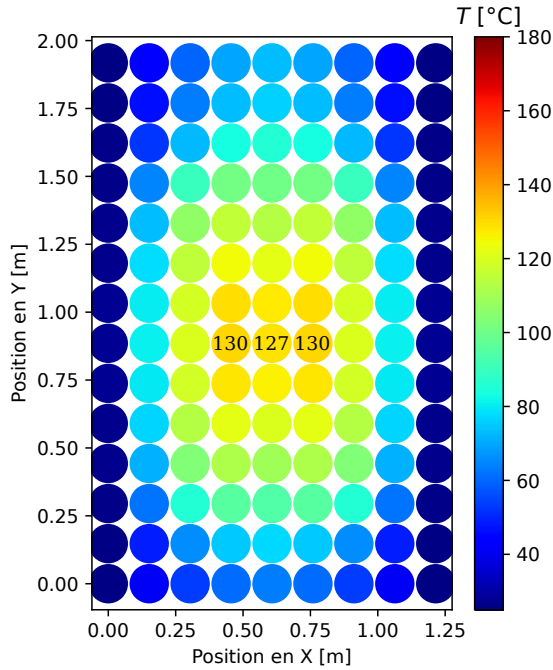


Figure 4 : Cas a : Modélisation nodale thermique d'un 1^{er} transformateur de $1,2 \times 1,9 \text{ m}^2$

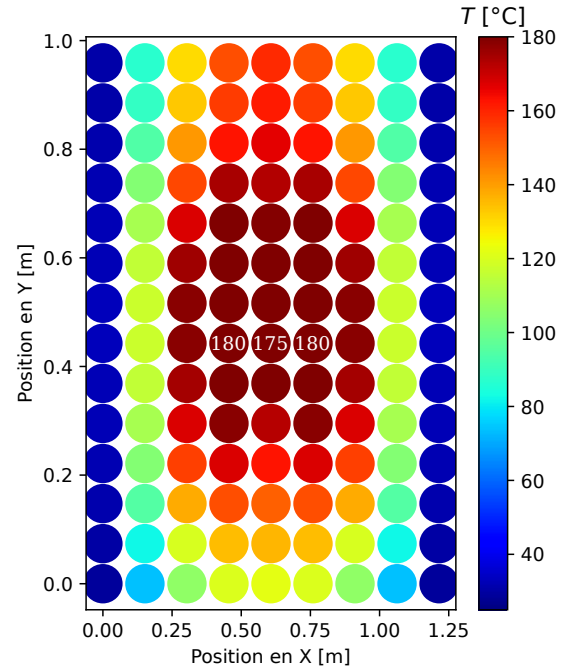


Figure 5 : Cas b : Modélisation nodale thermique d'un 2^e transformateur de $1,2 \times 0,95 \text{ m}^2$

IEC60076 [1]) se retrouve centré entre le noyau et la bobine. La température maximale relevée pour le 1^{er} transformateur (Figure 4) est de 130°C . Cette température est souvent définie comme température limite d'utilisation. Au-delà de cette limite, les transformateurs immergés peuvent subir des dégradations. Dans le 2nd cas (Figure 5), la température maximale relevée est de 180°C , dépassant les normes de sécurité et le rendant inutilisable dans ces conditions.

4. Conclusion

Cette méthode de modélisation thermique nodale, validée par comparaison avec la modélisation par volumes finis (non décrite dans cette étude), utilise la programmation orientée objet dans le but de créer des graphes. Ces graphes représentent les régions du modèle que l'on souhaite modéliser et, par leur aspect d'objet informatique, ils peuvent interagir entre eux permettant la réalisation de formes complexes. L'évolution de la température au sein de notre modèle peut être déterminée en régime permanent et transitoire (non décrit dans cette étude). Sachant que le but de cette méthode est le gain de temps de calcul, à titre de comparaison, un système composé de 13 000 points, modélisant la conduction dans un solide pendant 3,5 jours et avec un intervalle de temps de 10 secondes, a été réalisé en 3 h par la méthode nodale et 12 h par Fluent. Il est donc intéressant d'utiliser cette approche dans un contexte industriel.

Dans cette étude, la modélisation du transformateur immergé a démontré que la convection opérant dans l'huile ne peut pas être négligée. C'est pour cela que les prochaines études se baseront sur l'ajout de la modélisation d'un mouvement de fluide en nodal.

Remerciements

Les auteurs souhaitent exprimer leur gratitude à l'Ecole Doctorale EIPHI (contrat ANR-17-EURE-0002) et la Région Bourgogne Franche-Comté pour avoir soutenu ce travail.

Cette étude a été financée par la société SNCF et son pôle DGII.

Références

- [1] IEC60076, Normes internationales - transformateur de puissance, rap. tech., 2007.
- [2] L. Raeisian, H. Niazmand, E. Ebrahimnia-Bajestan et P. Werle, Thermal management of a distribution transformer : An optimization study of the cooling system using cfd and response surface methodology, *International Journal of Electrical Power Ramp; Energy Systems*, vol. 104, p. 443–455, 2019.
- [3] J. E. Whitehouse, *Circuit analysis*. Horwood engineering science series, Chichester, England : Horwood Publishing, 1997.
- [4] K. S. Smith, *An analytic nodal method for solving the two-group, multidimensional, static and transient neutron diffusion equations*. Thèse doctorat, 1979. Massachusetts Institute of Technology.
- [5] M. M. Michel Gondran, *Graphes et algorithmes (4^e éd.)*. Librairie Eyrolles, 2009.
- [6] J. Petitgirard et al., Steady state and 2d thermal equivalence circuit for winding heads—a new modelling approach, *Mathematical and Computational Applications*, vol. 25, 2020.
- [7] J. Petitgirard, *Modélisation du dimensionnement électrothermique d'un faisceau électrique dans son environnement véhicule*. Thèse doctorat, 2022. Université de Bourgogne Franche-Comté.
- [8] P. Nguyen, P. Baucour, F. Dubas, P. Desevaux, C. Corneloup et R. Falcand, Implémentation de résistances de contact en 2-d dans un circuit équivalent. thermique d'une encoche statorique d'un moteur électrique, in *32eme Congres Français de Thermique*, p. 201–208, Société Française de Thermique, 2024.
- [9] J.-C. Bavay et J. Verdun, Alliages fer-silicium, *Conversion de l'énergie électrique*, p. 46, 1991.
- [10] H. S. Carslaw, J. C. Jaeger et H. Feshbach, *Conduction of Heat in Solids*, vol. 15. AIP Publishing, 1962.
- [11] TCT, Noyaux magnétiques fer-silicium, rap. tech., TCT Magnetic Core and Component, 2022.
- [12] ISTpure, Huile thermique standard, rap. tech., 2021.
- [13] A. A. Hagberg, D. A. Schult et P. J. Swart, Exploring network structure, dynamics, and function using networkx, in *Proceedings of the 7th Python in Science Conference*, p. 11 – 85, 2008.
- [14] P. Virtanen, R. Gommers, T. E. Oliphant, M. Haberland, T. Reddy, D. Cournapeau, E. Burrowski, P. Peterson, W. Weckesser, J. Bright, S. J. van der Walt, M. Brett, J. Wilson, K. J. Millman, N. Mayorov, A. R. J. Nelson, E. Jones, R. Kern, E. Larson, C. J. Carey, Í. Polat, Y. Feng, E. W. Moore, J. VanderPlas, D. Laxalde, J. Perktold, R. Cimrman, I. Henriksen, E. A. Quintero, C. R. Harris, A. M. Archibald, A. H. Ribeiro, F. Pedregosa, P. van Mulbregt et SciPy 1.0 Contributors, SciPy 1.0 : Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python, *Nature Methods*, vol. 17, p. 261–272, 2020.