

# Bifurcation par modulation d'enveloppe d'un cycle limite dans une dynamique non linéaire à double retard

Lionel Weicker<sup>1</sup>, Thomas Erneux<sup>1</sup>, Maxime Jacquot<sup>2</sup>, Yanne Chembo<sup>2</sup>, & Laurent Larger<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Université Libre de Bruxelles, Groupe d'Optique Non linéaire Théorique, 1050 Bruxelles, Belgique.

<sup>2</sup> FEMTO-ST / dépt. Optique, UMR CNRS 6174, Université de Franche-Comté, 25030 Besançon Cedex, France.  
lweicker@ulb.ac.be

**Résumé.** Motivés par un montage expérimental en optique ayant permis de concevoir et démontrer un système complet de communication sécurisée par chaos [3] et fonctionnant sur un réseau optique installé au débit record de 10Gb/s [4], nous nous sommes intéressés à la route vers le chaos d'une dynamique non linéaire contrôlée par deux retards très distincts. Le système en question est un oscillateur opto-électronique soumis à deux feedbacks retardés. Le fait que ces deux retards soient très distincts induit des oscillations rapides modulées par une enveloppe carrée lentement variable. Ce système est décrit mathématiquement par deux équations différentielles à retard que nous avons étudiées à l'aide d'outils numériques et analytiques. Cette étude nous a permis de déterminer les conditions théoriques qui mènent à l'apparition de ces oscillations à enveloppe crénelée.

**Abstract.** Motivated by an experimental set-up in optics that enabled to design and demonstrate a full communication system secured by chaos [3] and operated over an installed optic network at a record bit rate of 10Gb/s [4], we investigated the route to chaos of a nonlinear delayed dynamic with two very different time delays. The system considered in this study is an opto-electronic oscillator subject to two delayed feedbacks. The interplay of a large and a relatively small delay is responsible of the onset of fast oscillations modulated by a slowly varying square-wave envelope. This system is described mathematically by two coupled delay-differential equations, which we analyze by using numerical and analytical tools. This study leads to the theoretical conditions needed for the onset of these crenellated oscillations.

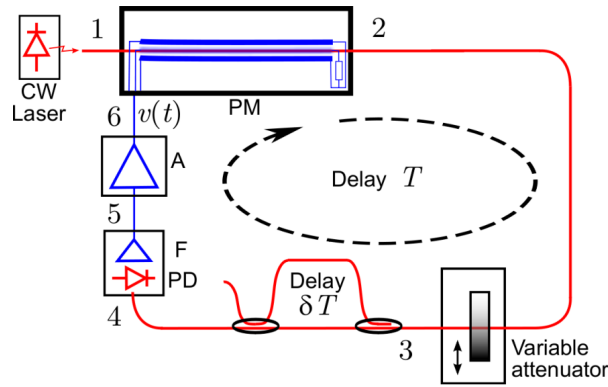
## 1 Introduction

Du fait de leur complexité structurelle [1], et de leurs nombreuses applications potentielles [2], les dynamiques à retard connaissent un vif intérêt dans la communauté internationale des dynamiques non linéaires. Motivés par un montage expérimental en optique ayant permis de concevoir et démontrer un système complet de communication sécurisée par chaos [3] et fonctionnant sur un réseau optique installé au débit record de 10Gb/s [4], nous nous sommes intéressés à la route vers le chaos d'une dynamique non linéaire contrôlée par deux retards très distincts. Le long de cette route vers le chaos, une première bifurcation de Hopf est rencontrée, mais celle-ci est ensuite suivie d'une déstabilisation de l'enveloppe d'oscillation, pour donner naissance au même cycle limite que celui de la bifurcation de Hopf, mais avec une modulation d'enveloppe lente, de fréquence commensurable.

Dans un premier temps, nous présentons le dispositif expérimental : un oscillateur électro-optique à double retard et à non linéarité non locale dans le temps sur la phase optique. Ensuite nous abordons les caractéristiques temporelles des régimes dynamiques observés expérimentalement autour de cette bifurcation particulière. Par après, nous effectuons une rapide comparaison entre les traces temporelles expérimentales et numériques. Ce modèle est ensuite analysé dans les conditions d'apparition de cette modulation d'enveloppe du cycle limite de la bifurcation de Hopf, en mettant en avant un certain nombre d'approximations basées sur les échelles de temps propres à l'oscillateur opto-électronique. Une approche perturbative à échelle de temps multiples nous permet ensuite de décrire les conditions théoriques qui mènent à l'apparition des oscillations à enveloppe crénelée. La partie analytique est décrite en détail dans [9]. Dans cet article, nous proposons des simulations numériques qui renforcent et confirment la comparaison quantitative entre traces temporelles expérimentales et leur étude analytique.

## 2 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental étudié est schématisé sur la figure 1. De manière simplifiée, le fonctionnement du système est le suivant : un laser à semiconducteur émet une lumière en direction d'un modulateur de phase (PM) (point 1). La phase optique du signal injecté est ensuite modulée en fonction de la tension appliquée au modulateur. L'intensité du signal sortant du modulateur (point 2) est ajustée par un atténuateur optique variable (point 3). La lumière atténuée entre ensuite dans un interféromètre passif déséquilibré de type Mach-Zehnder. Cet interféromètre convertit de façon non linéaire la variation de phase optique, en des variations de l'intensité lumineuse. Ces dernières seront ensuite détectées par une photodiode (PD) (point 4). Le signal électrique à la sortie de la photodiode sera alors converti en tension et filtré (point 5), pour ensuite être amplifié (point 6) avant d'être réinjecté dans le PM.



**Figure 1.** Schéma du dispositif expérimental

Ce système peut être modélisé mathématiquement par l'équation intégréo-différentielle à retard suivante

$$\frac{1}{\theta} \int_0^t x(\chi) d\chi + \tau \frac{dx}{dt} + x = -\frac{\beta}{2} \sin[2(x(t-T) - x(t-T-\delta T))] \quad (1)$$

où  $x$  est proportionnel à la tension  $v(t)$ ,  $\beta$  représente le gain de la contre-réaction, celui-ci étant ajustable par l'atténuateur variable,  $T$  est le retard total engendré par le système,  $\delta T$  est le retard entre les deux bras de l'interféromètre,  $f_{high} = (2\pi\tau)^{-1}$  et  $f_{low} = (2\pi\theta)^{-1}$  correspondent aux fréquences de coupures de la photodiode. Il est utile de préciser ici que (1) est un cas particulier du fonctionnement de l'interféromètre, pour lequel la phase statique de la condition d'interférence vaut  $\pi/4$ . Les valeurs expérimentales des différents paramètres utilisés sont reportées Tab. 1.

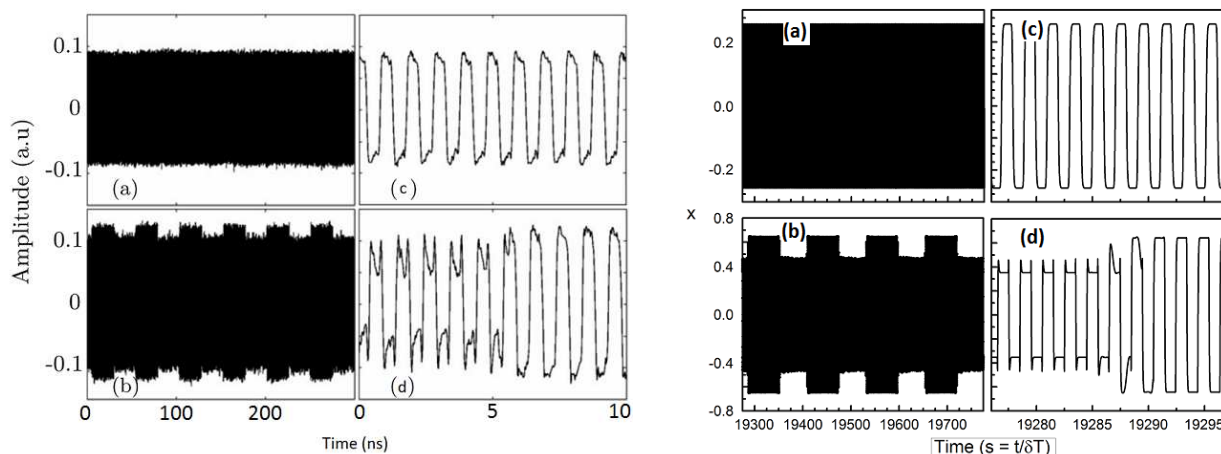
**Table1.** Valeurs expérimentales des paramètres du système.

Paramètre	Valeur
$\beta$	0 - 6
$\tau$	12.2 ps
$\theta$	5.3 $\mu$ s
$T$	24.35 ns
$\delta T$	400 ps

### 3 Résultats expérimentaux

Dans cette étude, nous nous sommes intéressés à l'influence du paramètre  $\beta$  sur la dynamique du système. Pour de faibles valeurs de  $\beta$ , le système admet l'état  $x = 0$  comme état stationnaire. Ensuite, lorsque  $\beta$  est progressivement augmenté, de l'état stationnaire émerge une bifurcation ( $\beta \simeq 0.5$ ) vers un régime d'oscillations rapides (séries temporelles (a) et (c) de la figure 2(a)). Ces oscillations ont une période  $T_1 \simeq 0.83$  ns. Nous remarquons que  $T_1$  possède une valeur proche de  $2\delta T \simeq 0.8$  ns, ce qui suggère que seul  $\delta T$  joue un rôle pour cette première bifurcation. En augmentant progressivement le paramètre  $\beta$ , nous observons un changement de comportement dans la dynamique du système. Au delà d'un certain  $\beta_C \simeq 1.13$  apparaît un autre type d'oscillations : des oscillations rapides modulées par une enveloppe carrée lentement variable (séries temporelles (b) et (d) de la figure 2(a)). La période de l'enveloppe lentement variable vaut  $T_2 \simeq 50$  ns, ce qui est proche de  $2T \simeq 48.7$  ns alors que la période des oscillations rapides à l'intérieur de l'enveloppe est toujours  $T_1$ . Ceci suggère que pour des valeurs supérieures à  $\beta_C$ , à la fois  $\delta T$  et  $T$  jouent un rôle actif pour une deuxième bifurcation. Pour des valeurs bien plus grandes de  $\beta$ , des oscillations chaotiques sont observées (régimes dynamiques utilisés en communications optiques sécurisées par chaos).

Nous allons dans un premier temps vérifier numériquement que notre modèle mathématique reproduit bien ces comportements et ensuite nous allons effectuer un traitement analytique permettant de caractériser ces deux premières bifurcations.



(a) Résultat expérimental. A gauche, une vue globale des séries temporelles. A droite, un agrandissement des figures a) et b). a) et c) Pour  $\beta \simeq 0.6$  : oscillations rapides de périodes  $T_1 \simeq 0.83$  ns ; b) et d) Pour  $\beta \simeq 1.3$  : ondes crénelées avec enveloppe carrée lentement variable de période  $T_2 \simeq 50$  ns et dont les oscillations rapides à l'intérieur de cette enveloppe ont une période  $T_1 \simeq 0.83$  ns. Figure reprise de [3].

(b) Résultat numérique. A gauche, une vue globale des séries temporelles. A droite, un agrandissement des figures a) et b). a) et c) Pour  $\beta = 0.6$  : ondes obtenues au-delà de la première bifurcation. La période des oscillations est proche de 2 ; b) et d)  $\beta = 1.3$  : ondes crénelées dont la période de l'enveloppe lentement variable est proche de  $2\zeta$  et la période des oscillations rapides à l'intérieur de l'enveloppe est proche de 2.

**Figure 2.** Séries temporelles obtenues pour différentes valeurs de  $\beta$ .

### 4 Simulations numériques

Pour faciliter le traitement numérique de l'équation (1), nous redéfinissons l'échelle de temps en introduisant le nouveau temps  $s \equiv t/\delta T$ . Nous définissons aussi une nouvelle variable  $\delta T y \equiv \int_0^t x(\chi) d\chi$ ,

ce qui nous mène à deux équations différentielles à retard :

$$\begin{cases} \epsilon_2 \frac{dx}{ds} = -x - \epsilon_1 y - \frac{\beta}{2} \sin[2(x_\zeta - x_{\zeta-1})] \\ \frac{dy}{ds} = x \end{cases} \quad (2)$$

où  $x_\zeta = x(s - \zeta)$ ,  $\zeta \equiv T/\delta T$ ,  $\epsilon_1 \equiv \delta T/\theta$  et  $\epsilon_2 \equiv \tau/\delta T$ . En tenant compte des valeurs expérimentales des paramètres, nous déterminons  $\zeta = 60.875$ ,  $\epsilon_1 = 7.5472 \cdot 10^{-5}$  et  $\epsilon_2 = 0.0305$ .

Les simulations numériques ont été effectuées à l'aide du logiciel Dynamics Solver<sup>1</sup>. La méthode utilisée est l'algorithme Dormand-Prince 8(5,3) avec une tolérance de  $10^{-8}$ . Les résultats obtenus sont affichés sur la figure 2(b). Proche de la première bifurcation, nous obtenons des oscillations de période proche de 2 en terme d'unité de temps  $s$ . Ceci correspond à des oscillations de période  $2\delta T$  en unité de  $t$  (séries temporelles a) et c) de la figure 2(b)). Pour  $\beta = 1.3$ , on obtient des oscillations rapides modulées par une enveloppe carrée lentement variable de période proche de  $T_2 \simeq 2\zeta$  en unité de temps  $s$ . Ceci correspond à des oscillations de période proche de  $2T$  en unité de temps  $t$ . La période des oscillations rapides reste inchangée et est proche de 2 (séries temporelles b) et d) de la figure 2(b)). Nous notons le bon accord entre l'expérience et le numérique notamment en comparant les figures 2(a) d) et 2(b) d). Sur ces figures, nous pouvons observer que les transitions rapides des ondes carrées sont bien reproduites quantitativement par les équations du modèle. Nous allons maintenant déterminer analytiquement les conditions théoriques qui mènent à l'apparition de ces deux premières bifurcations.

## 5 Traitement analytique

Dans cette section, nous allons nous intéresser aux deux premières bifurcations observées expérimentalement et numériquement.

### 5.1 Première bifurcation

Suite aux observations expérimentales et numériques, nous pouvons anticiper une première bifurcation proche de  $\beta = \beta_H = 1/2$ . Cette bifurcation mène à des oscillations en ondes carrées de période proche de 2. Etant données les faibles valeurs de  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$ , nous introduisons  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$  dans l'équation (2), ce qui mène à

$$x(s) = -\frac{\beta}{2} \sin[2x_\zeta - 2x_{\zeta+1}]. \quad (3)$$

Cette équation définit une application qui relie  $x(s)$  à  $x_\zeta$  et  $x_{\zeta+1}$ . L'analyse de stabilité linéaire [9] suggère la relation suivante entre le paramètre  $\zeta \gg 1$  et la demi période  $P \sim 1$

$$\frac{\zeta}{P} = p + O(\epsilon) \quad (4)$$

où  $p = 2n + 1$  est un grand nombre impair et  $\epsilon \equiv p^{-1}$ . Nous pouvons donc réécrire  $x_\zeta$  et  $x_{\zeta+1}$  comme  $x_\zeta = x_{pP} + O(\epsilon)$  et  $x_{\zeta+1} = x_{(p+1)P} + O(\epsilon)$ . L'équation (3) devient donc

$$x_k = -\frac{\beta}{2} \sin(2x_{k-p} - 2x_{k-p-1}) \quad (5)$$

où  $x_k \equiv x(s)$  et  $x_{k-1} \equiv x_P$ . Pour déterminer les extrema des solutions oscillantes, nous cherchons un point fixe d'ordre 2, ce qui correspond à insérer la condition  $x_k = x_{k-2}$  dans l'équation (5). Ceci donne le résultat suivant

$$u_1 = -u_0, \quad (6)$$

1. J.M. AGUIRREGABIRIA, *Dynamics Solver*, Free program to simulate continuous and discrete dynamical systems available from <http://tp.lc.ehu.es/jma/ds/ds.html>.

$$u_0 = \frac{\beta}{2} \sin(4u_0) \quad (7)$$

où  $u_0 = x_k$  et  $u_1 = x_{k-1}$ . Le résultat des points fixes d'ordre 2 est porté en pointillés sur la figure 3 et correspond aux extrema des oscillations émergeant de la première bifurcation. Dans les unités de temps  $t$ , la période vaut

$$T_1 = 2P \delta T = 2\delta T + O(\epsilon). \quad (8)$$

Ce résultat correspond bien aux observations expérimentales et numériques.

## 5.2 Deuxième bifurcation

Suite aux observations expérimentales et numériques, nous cherchons à présent une solution qui dépend à la fois du temps  $s$  et d'un temps plus lent  $\rho \equiv \epsilon s$ . Nous allons ensuite appliquer la méthode des échelles multiples [5,6,7]. Cette méthode nous permet de traiter les deux temps comme étant indépendants ce qui implique les expressions suivantes

$$x_\zeta = x(s - \zeta, \rho - 1 + O(\epsilon)), \quad (9)$$

$$x_{\zeta+1} = x(s - \zeta - 1, \rho - 1 + O(\epsilon)). \quad (10)$$

De l'équation (2), avec  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$ , (9) et (10), nous obtenons

$$x(s, \rho) = -\frac{\beta}{2} \sin[2x(s - pP, \rho - 1) - 2x(s - (p+1)P, \rho - 1)] + O(\epsilon). \quad (11)$$

Nous procédons ensuite de la même façon que pour l'équation (5) et obtenons, dans la limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , l'application suivante

$$x_k(\rho) = -\frac{\beta}{2} \sin[2x_{k-p}(\rho - 1) - 2x_{k-p-1}(\rho - 1)]. \quad (12)$$

Comme précédemment, nous recherchons un point fixe d'ordre 2 de l'équation (12) satisfaisant la condition  $x_k = x_{k-2}$ . Les extrema  $u_0 = x_k$  et  $u_1 = x_{k+1}$  satisfont maintenant les conditions suivantes

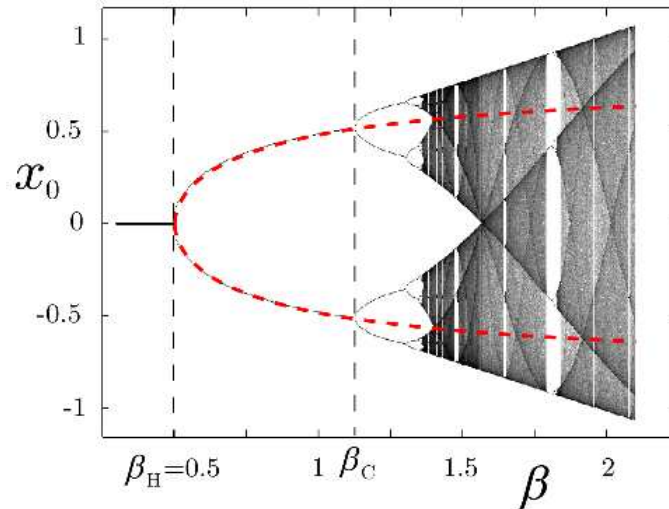
$$u_1 = -u_0, \quad (13)$$

$$u_0(\rho) = \frac{\beta}{2} \sin[4u_0(\rho - 1)]. \quad (14)$$

Cette équation est équivalente à l'application sinus  $v_{j+1} = r \sin(\pi v_j/4)$  avec  $u_0(\rho) = \pi c_{j+1}/4$ ,  $u_0(\rho - 1) = \pi v_j$ , et  $r = 2\beta/\pi$  [8]. L'équation (14) décrit les effets de la modulation sur les temps longs des oscillations rapides de période  $2P$ . Ses points fixes d'ordre 1 satisfont la condition  $u_0(\rho - 1) = u_0$  et l'équation (14) se réduit alors, comme attendu, à l'équation (7). Nous savons déjà que ce résultat correspond aux extrema des oscillations de période  $2P$  dans les unités de temps  $s$ . Mais l'équation (14) admet aussi d'autres points fixes (figure 3) qui mènent, au fur et à mesure que  $\beta$  augmente, à des oscillations chaotiques. C'est exactement ce qui a été observé de façon expérimentale et numérique.

L'enveloppe des oscillations lentes montrées sur les figures 2(a)-b) et 2(b)-b) apparaît pour  $\beta = 1.3$  ce qui correspond au domaine  $\beta_C \simeq 1.13 < \beta < 1.31$  de la deuxième bifurcation. Les points fixes d'ordre 2 de l'équation (14) correspondent donc aux extrema de l'enveloppe lentement variable (figure 3). La période des oscillations crénelées vaut  $T_2 = 2\epsilon^{-1}$  dans les unités de temps  $s$ . Ce qui donne, en terme d'unités de temps  $t$

$$T_2 = 2\delta T \epsilon^{-1} \simeq 2T \simeq 2p\delta T \simeq 2T. \quad (15)$$



**Figure 3.** Diagramme de bifurcation. Les pointillés correspondent aux extrema  $u_0$  et  $u_1$  des solutions 2-périodiques en onde carrée. Les points gris correspondent aux extrema obtenus par le map (14).

## 6 Conclusion

Nous avons étudié de façon expérimentale, numérique et analytique les premières instabilités d'un oscillateur opto-électronique à double retard. Bien que le modèle utilisé soit un modèle composé de 2 équations différentielles à retard, une analyse asymptotique basée sur une nette séparation des deux retards a donné une bonne description des premières bifurcations observées lorsque le gain du feedback est augmenté. Cette analyse a mis en évidence l'importance et le rôle joué par ces deux retards.

## Remerciements

Ces travaux ont été soutenus par le FRIA (LW) et le FNRS (TE), ainsi que par le projet Européen PHOCUS (FET IST FP7 No.240763, MJ, YC et LL).

## Références

1. T. ERNEUX, *Applied Delay Differential Equations*, Springer (2009).
2. L. LARGER & J.M. DUDLEY, Optoelectronic chaos, *Nature, News & Views*, **465**, 41-42 (2010).
3. R. LAVROV, M. PEIL, M. JACQUOT, L. LARGER, V. UDALTSOV & J. DUDLEY, Electro-optic delay oscillator with non-local non linearity : optical phase dynamics, chaos, and synchronization, *Physical Review E*, **80**, 026207 (2009).
4. R. LAVROV, M. JACQUOT, L. LARGER, Nonlocal nonlinear electro-optic phase dynamics demonstrating 10 Gb/s chaos communications, *IEEE Journal in Quantum Electronics*, **46**, 1430-1435 (2010).
5. C.M. BENDER, S.A. ORSZAG, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*, Mc Graw Hill, New York (1978).
6. J. KEVORKIAN, J.D. COLE, *Multiple scale and singular perturbation methods*, Springer (1996).
7. F. VERHULST, *Methods and Applications of Singular Perturbations : Boundary Layers and Multiple Timescale Dynamics*, Springer (2005).
8. S. H. STROGATZ, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, 369, Addison-Wesley, Reading, MA (1995).
9. L. WEICKER, T. ERNEUX, M. JACQUOT, Y. CHEMBO & L. LARGER, Crenelated fast oscillatory outputs of a two-delay electro-optic oscillator, *Physical Review E*, **85**, 026206 (2012).