

# Validation d'un modèle de moteur Stirling à pistons libres pour la micro-cogénération

Sylvie BEGOT<sup>1\*</sup>, Guillaume LAYES<sup>1</sup>, François LANZETTA<sup>1</sup>, Philippe NIKA<sup>1</sup>, Régis CONTREAU<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire FEMTO-ST CNRS UMR 6174  
CNRS/Université de Franche-Comté/ENSMM/UTBM  
Département ENERGIE, 2 avenue Jean Moulin, 90000 BELFORT

<sup>2</sup>GDF SUEZ, CRIGEN, 361 av du président Wilson, BP 33, 361 av du président Wilson, 93211 SAINT-DENIS-LA-PLAINE CEDEX

\* (auteur correspondant : sylvie.begot@univ-fcomte.fr)

**Résumé** - L'article décrit une modélisation de machine Stirling à pistons libres pour une application de micro-cogénération domestique. Le modèle mécanique ainsi que le calcul des pertes sont détaillés. Les résultats du modèle sont comparés avec les résultats théoriques d'autres auteurs et avec les résultats expérimentaux obtenus sur la machine RE1000 par la NASA. L'analyse montre une bonne correspondance sur les aspects mécaniques de la machine (fréquence) mais une sous-estimation des pertes par le modèle.

## Nomenclature

$A$	aire, $m^2$
$D$	coefficients dissipatifs par unité de masse, $s^{-1}$
$d$	diamètre échangeur, $m$
$C_f$	coefficient de frottement de Darcy
$E$	énergie dissipée sur un quart de cycle, $J$
$i$	$i^2 = -1$
$K$	raideurs par unité masse, $N.m^{-1}.kg^{-1}$
$L$	longueur échangeurs, $m$
$M$	matrice de passage de $A$ vers sa forme diagonale
$Re$	nombre de Reynolds
$U$	vitesse maximale du fluide, $m.s^{-1}$
$u$	vitesse du fluide instantanée, $m.s^{-1}$
$V$	volume, $m^3$
$x$	position des pistons, $m$
$\dot{x}$	vitesse des pistons, $m.s^{-1}$
$\ddot{x}$	accélération des pistons, $m.s^{-2}$

## Symboles grecs

$\varphi$	déphasage piston/déplaceur, $rad$
$\kappa$	perméabilité du milieu poreux, $m.s^{-1}$
$\mu$	viscosité dynamique, $kg.m^{-1}.s^{-1}$
$\rho$	masse volumique, $kg.m^{-3}$
$\theta$	angle, $rad$
$\psi$	porosité
$\omega$	pulsation mouvement pistons, $rad.s^{-1}$

## Indices et exposants

$c$	compression
$d$	déplaceur
$e$	expansion
$h$	hydraulique
$max$	maximum
$p$	piston
$r$	régénérateur
$t$	tige déplaceur
$0$	initial

## 1. Introduction

Le département ENERGIE de l'Institut FEMTO-ST ainsi que GDF SUEZ et le laboratoire SATIE mènent depuis plusieurs années des travaux sur la micro-cogénération domestique sur la base de machine Stirling à pistons libres. L'objectif est de développer un écogénérateur qui répondrait à l'intégralité des besoins de chauffage et d'eau chaude sanitaire d'un logement et à une partie des besoins en électricité. L'écogénérateur intègre ainsi un module de micro-cogénération à moteur Stirling au sein d'une chaudière à condensation. Les avantages de cette cogénération décentralisée sont de trois ordres : économique tout d'abord avec une baisse attendue de la facture énergétique pouvant aller jusqu'à 30%, environnementaux ensuite avec une baisse attendue de 30% des émissions de CO<sub>2</sub>, énergétique enfin avec une économie

d'énergie primaire de 20%. Le projet de l'Agence Nationale de la Recherche intitulé Chaudière ElectroThermique Intégrée (CETI) dont le laboratoire SATIE est partenaire coordinateur, a pour objectif de développer un prototype de micro-cogénérateur à base de machine Stirling à pistons libres dont les performances sont compatibles avec une application de micro-cogénération domestique.

La machine Stirling est un moteur à apport de chaleur externe inventée par Robert Stirling en 1816 [1-2]. Il utilise une source externe d'énergie thermique pour chauffer le gaz contenu dans un cylindre. Ce gaz sous pression se détend quand il est chauffé et met en mouvement un piston qui effectue alors un travail mécanique. Après la détente, le gaz est refroidi puis comprimé à nouveau avant le prochain cycle de chauffage. Le régénérateur (cœur de la machine Stirling) absorbe puis restitue la chaleur du gaz pendant la compression et la détente. La machine Stirling à pistons libres a été inventée par W.T. Beale en 1964 [3]. Dans ce type de machine, les pertes par frottement et l'usure mécanique sont réduites. L'enveloppe contenant la machine peut être hermétiquement scellée ce qui permet une durée d'opération sans maintenance d'environ 10 ans de cette machine [4].

Pour développer un prototype, une modélisation permettant le dimensionnement et la simulation des performances de la machine Stirling à pistons libres a été effectuée [5]. Cette modélisation a pour objectifs principaux le dimensionnement de la machine et l'étude de sa stabilité. Les travaux de modélisation de la machine Stirling à pistons libres sont fondés sur une approche analytique développée dans [6] et étudiée au laboratoire dans [7-8]. Dans ce travail, les résultats obtenus par ce modèle sont comparés avec les résultats théoriques d'autres auteurs [9][10] et avec les résultats expérimentaux obtenus par la NASA lors des essais du modèle RE1000 de Sunpower [11].

L'article est divisé en deux parties : la première partie décrit brièvement le modèle développé et détaille le calcul des pertes, la deuxième partie décrit les différents essais de validation effectués

## 2. Modélisation

### 2.1. Présentation générale de la machine

Le modèle développé est celui d'une machine Stirling à pistons libres (Figure 1). La machine comprend un piston ainsi qu'un déplaceur. A chaque extrémité de la machine se trouvent un échangeur chaud et un échangeur froid. Un régénérateur nécessaire à la réalisation du cycle thermodynamique du gaz complète le dispositif. Des volumes tampons présents sous le piston et dans le déplaceur jouent le rôle de ressorts gazeux. Le piston produit un travail mécanique supposé entraîner un alternateur linéaire.

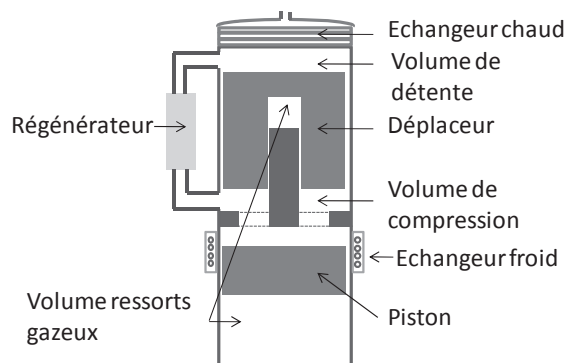


Figure 1 : Schéma du MSPL modélisé

Les équations mécaniques de la machine ainsi qu'une étude de la stabilité ont été exposées dans [5]. Elles s'écrivent de la façon suivante :

$$\ddot{x}_p = K_{pp}x_p + K_{pd}x_d + D_{pp}\dot{x}_p + D_{pd}\dot{x}_d \quad (1)$$

$$\ddot{x}_d = K_{dp}x_p + K_{dd}x_d + D_{dp}\dot{x}_p + D_{dd}\dot{x}_d \quad (2)$$

Les coefficients notés  $K$  sont homogènes à des raideurs par unité de masse, les coefficients notés  $D$  sont des termes dissipatifs par unité de masse. Dans les paragraphes suivants, nous détaillons les pertes dans la machine et particulièrement le calcul des coefficients de dissipation.

## 2.2. Calcul des pertes de charges dans les échangeurs

Les pertes de charges dans les échangeurs constituent une des dissipations de la machine. Les différentes étapes du calcul sont le calcul de la vitesse d'écoulement, puis celui du coefficient de frottement et enfin la linéarisation.

La variation des volumes de compression et de détente est obtenue par :

$$\dot{V}_c = A_p\dot{x}_p - (A_d - A_t)\dot{x}_d \quad (3)$$

$$\dot{V}_e = A_d\dot{x}_d \quad (4)$$

On en déduit le débit volumique au travers des échangeurs :

$$\dot{V} = \dot{V}_c - \dot{V}_e = A_p\dot{x}_p - (2A_d - A_t)\dot{x}_d \quad (5)$$

et la vitesse au travers d'une surface  $A$  :

$$u = \frac{\dot{V}}{A} \quad (6)$$

Nous faisons l'hypothèse que les mouvements du piston et du déplaceur sont sinusoïdaux, soit en notation complexe :

$$x_d = x_{dmax}e^{i\omega t} \quad (7)$$

$$x_p = x_{pmax}e^{i(\omega t + \varphi)} \quad (8)$$

avec  $\omega$  la pulsation du mouvement et  $\varphi$  le déphasage entre le piston et le déplaceur. Avec ces notations, en fonctionnement moteur,  $\varphi$  est négatif.

Les vitesses du piston et du déplaceur sont :

$$\dot{x}_d = i\omega x_{dmax}e^{i\omega t} \quad (9)$$

$$\dot{x}_p = i\omega x_{pmax}e^{i(\omega t + \varphi)} \quad (10)$$

Par conséquent, l'amplitude du débit volumique est :

$$|\dot{V}| = \omega \sqrt{A_p^2 x_{pmax}^2 - 2(2A_d - A_t)A_p x_{pmax} x_{dmax} \cos\varphi + (2A_d - A_t)^2 x_{dmax}^2} \quad (11)$$

Les corrélations utilisées pour le coefficient de frottement de Darcy sont celles des écoulements permanents même si ce n'est pas le cas dans la machine :

$$Re \leq 2000, C_f = \frac{64}{Re} \quad (12)$$

$$Re > 2000, C_f = 0.316Re^{-0.25} \text{ (corrélation de Blasius)} \quad (13)$$

avec  $Re$  le nombre de Reynolds associé à la vitesse moyenne du fluide.

On obtient donc les éléments nécessaires au calcul des pertes de charges classiques (écoulements permanents) :

$$\Delta P = C_f \frac{\rho u^2 L}{2 d} \quad (14)$$

Pour linéariser cette expression vis-à-vis de la vitesse, nous calculons la dissipation énergétique linéaire équivalente [6]. La dissipation énergétique due aux pertes de charges sur un quart de cycle est :

$$E_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \rho u^2 C_f \frac{L}{d} u \frac{d\theta}{\omega} \quad (15)$$

Pour une vitesse sinusoïdale :

$$u = U \cos \omega t \quad (16)$$

Après intégration :

$$E_1 = \frac{1}{3} \frac{\rho U^3}{\omega} C_f \frac{L}{d} \quad (17)$$

La perte de charge produite par un élément dissipatif linéaire est :

$$\Delta P = C_{eq} u \quad (18)$$

De même, on peut calculer l'énergie dissipée par cet élément sur un quart de cycle :

$$E_2 = \frac{\pi C_{eq}}{4 \omega} U^2 \quad (19)$$

$E_1$  et  $E_2$  étant égales, on en déduit :

$$C_{eq} = \frac{4}{3\pi} \rho U C_f \frac{L}{d} \quad (20)$$

Donc, la perte de charge linéarisée dans les échangeurs chaud et froid s'écrit :

$$\Delta P = \frac{4}{3\pi} \left[ \rho_h C_f \frac{L_h}{d_h} U_h u_h + \rho_k C_f \frac{L_k}{d_k} U_k u_k \right] \quad (21)$$

En utilisant l'expression du débit volumique :

$$\Delta P = \frac{4}{3\pi} \left[ \rho_h C_f \frac{L_h}{d_h} \frac{U_h}{A_h} + \rho_k C_f \frac{L_k}{d_k} \frac{U_k}{A_k} \right] (A_p \dot{x}_p - (2A_d - A_r) \dot{x}_d) \quad (22)$$

Pour tenir compte des pertes singulières, cette valeur est doublée.

Ceci nous permet de calculer des termes dissipatifs des équations mécaniques (1) et (2).

### 2.3. Calcul des pertes de charge dans le régénérateur

Dans le régénérateur, nous supposons que les pertes de charges suivent l'équivalent d'une loi de Darcy :

$$\Delta P = \frac{\mu L_r}{\kappa} \frac{|\dot{V}|}{\psi A_r} \quad (23)$$

avec

$$\kappa = \frac{\psi d_{hr}^2}{2Re * C_{fr}} \quad (24)$$

Donc :

$$\Delta P = \frac{\mu L_r}{\psi^2 d_{hr}^2} \frac{2Re C_{fr}}{A_r} (A_p \dot{x}_p - (2A_d - A_t) \dot{x}_d) \quad (25)$$

Comme précédemment, pour tenir compte des pertes singulières, cette valeur est doublée.

### 2.4. Pertes par hystérésis (compression et détente non réversibles) dans les ressorts gazeux

Nous faisons l’hypothèse que ces pertes sont fixes et nous imposons leur valeur à l’aide des valeurs proposées dans [6].

### 3. Validation de la modélisation

La première étape de la validation de la modélisation est de comparer le modèle avec les résultats obtenus par d’autres auteurs [6][9][10]. Nous utilisons les coefficients des équations différentielles (1) et (2) et les données d’une machine de type RE1000 [6] pour calculer la fréquence de la machine, le déphasage piston déplaceur, le rapport de déplacement et la puissance produite. Les données d’entrée utilisées sont dans le Tableau 1. Les données de sortie sont présentées dans le Tableau 2. Dans ce tableau, se trouvent également les résultats obtenus par Urieli et Berchowitz[6] dans une approche linéaire, une simulation complète et une expérience ainsi que les résultats obtenus par Rogkakis et al[9] et Formosa[10]. Notre modèle est structurellement semblable à celui de [6] et [9] mais nous avons ajouté une résolution itérative pour prendre en compte certaines non-linéarités des coefficients [5].

Si l’on compare le modèle présenté avec la modélisation de Urieli et al linéaire, nous constatons une bonne concordance. La puissance mécanique obtenue par notre modèle est inférieure, ce qui correspond sans doute à la prise en compte de non linéarités. Si on compare à l’expérimental, on constate la concordance des fréquences, un écart sur le déphasage et un écart majeur sur le rapport de déplacement qui est nettement sous-estimé. Cela semble lié à la nature de la modélisation, les modèles possédant la même structure [6][9] présentant le même écart, les modèles différant en particulier sur les pertes ayant une meilleure concordance [6][10]. La puissance de la machine est surestimée de 20 % par rapport à la réalité ce qui correspond probablement également à une modélisation des pertes insuffisante.

$K_{pp}$	-53450	$K_{dp}$	-70860
$K_{pd}$	29830	$K_{dd}$	2121
$D_{pp}$	-74	$D_{dp}$	71
		$D_{dd}$	-506

Tableau 1: Coefficients des équations différentielles utilisées pour la validation

	Urieli linéaire [6]	Urieli simulation [6]	Rogdakis [9]	Formosa [10]	Expérim. [6]	Modèle présenté	Ecart modèle / Urieli lin. (%)	Ecart modèle /exp (%)
Fréquence (Hz)	33,2	30	32,9	29,2	30	32,9	-1	10
Déphasage (°)	-57,9	-43,7	-55,1	62,2	-42,5	-55	-5	29
Rapport de dépl.	0,62	1,08	0,63	1,06	1,06	0,63	2	-41
Puissance (W)	1320	1080	1325	1100	1000	1194	-10	19

Tableau 2: Comparaison de divers résultats de modélisation

### 4. Comparaison des résultats expérimentaux et du modèle

Pour évaluer le modèle plus complètement, nous utilisons les données expérimentales d’une machine RE1000 essayée par la NASA [11]. Ces essais ont été réalisés pour des puissances allant de 532 W à 1026 W par l’application d’un amortissement réglable sur le piston. Les caractéristiques de la machine sont rappelées Tableau 3.

Masse piston	Masse déplaceur	Diamètre piston/déplaceur	Volume éch. Chaud+froid	Volume régénérateur
<i>kg</i>	<i>kg</i>	<i>m</i>	<i>m</i> <sup>3</sup>	<i>m</i> <sup>3</sup>
5,97	0,426	0,057	$4,8 \cdot 10^{-5}$	$2,8 \cdot 10^{-5}$
Nbre tubes éch. chaud	Diam/Longueur tubes éch. chaud	Nbre conduits rect. éch. froid	Dim conduits rect. éch. froid	Long. conduits rect. éch. froid
	<i>m</i>		<i>m</i>	<i>m</i>
34	$2,4 \cdot 10^{-3} / 18,3 \cdot 10^{-2}$	135	$0,51 \cdot 10^{-3} / 3,8 \cdot 10^{-3}$	$7,9 \cdot 10^{-2}$
Porosité régénérateur	Température chaude	Température froide	Gaz	Pression moyenne
	<i>K</i>	<i>K</i>		<i>Pa</i>
0,76	873	298	Hélium	$7 \cdot 10^6$
Course max. piston	Hauteur volume comp. au repos	Hauteur volume détente au repos	Volume ressort gazeux piston	Volume ressort gazeux déplaceur
<i>m</i>	<i>m</i>	<i>m</i>	<i>m</i> <sup>3</sup>	<i>m</i> <sup>3</sup>
0,03	0,032	0,011	0,02	$3,2 \cdot 10^{-5}$

Tableau 3: Principales caractéristiques de la RE1000

Nous imposons une puissance mécanique de sortie de la machine correspondant à la puissance appliquée par le frein dans les essais expérimentaux et nous fixons l'amplitude de la course du piston à la valeur mesurée.

#### 4.1 Comparaison des résultats de l'essai 1009 à 794 W

Pour cet essai, la course du piston est de 0,024 m. L'allure des positions du piston et du déplaceur est présentée sur la Figure 2a. La machine modélisée n'est pas dans un régime d'oscillations auto-entretenues, les valeurs propres sont à partie réelle positive [5], les amplitudes de déplacement augmentent avec le temps. Ceci est cohérent avec la sous-estimation des pertes de 20% par le modèle établie au paragraphe précédent. Les pertes de charge de la machine sont présentées sur la Figure 2b. Les valeurs mesurées entre les volumes de compression et de détente étant de 90 kPa, on peut considérer que les pertes de charge sont correctement modélisées et que le différentiel de puissance s'explique par d'autres pertes.

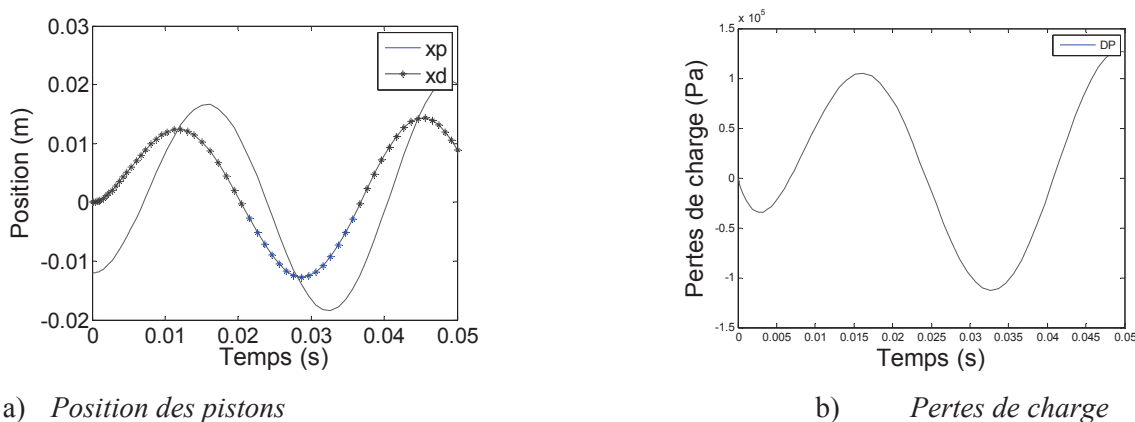


Figure 2 Modélisation de l'essai 1009

Pour modéliser ces pertes, nous imposons une puissance dissipée de 1060 W à la machine. Nous constatons que les oscillations sont auto entretenues (Figure 3), ce qui confirme que le modèle sous-estime les pertes additionnelles de 20% environ. Ce différentiel de puissance

serait majoritairement dû aux pertes par conduction et radiation qui ont été estimées à 212 W par Rogdakis et al pour la machine RE1000, ce qui est cohérent avec nos résultats.

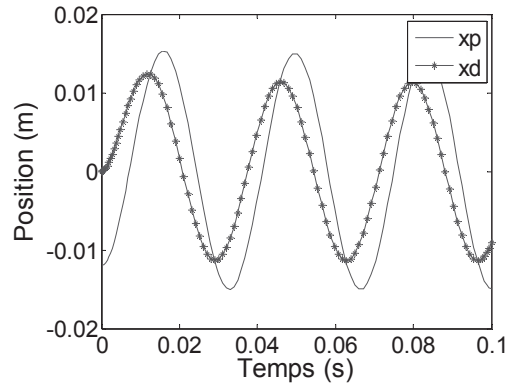


Figure 3 Positions piston et déplaceur pour 1060 W

#### 4.2 Comparaison des résultats valeurs mécaniques entre 532 W et 1026 W

Pour poursuivre la validation, nous traçons sur les figures les valeurs de fréquence, déphasage et rapport de déplacement. Nous constatons un bon accord sur les valeurs de fréquence (Figure 4), et une même allure sur les rapports de déplacement (Figure 5). L'écart sur les valeurs de rapport de déplacement est du même ordre que celui observé au paragraphe 4.1. L'écart sur le déphasage (Figure 6) est probablement lié à l'écart de puissance. Dans les deux cas, il est faiblement variable sur la plage de variation.

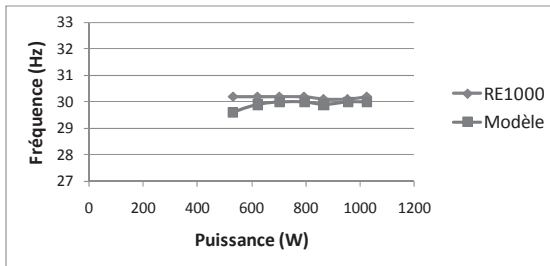


Figure 4 Fréquence calculée et mesurée

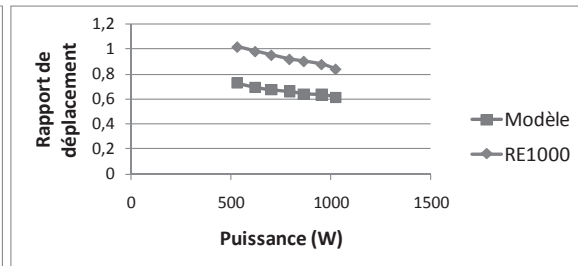


Figure 5 Rapport de déplacement

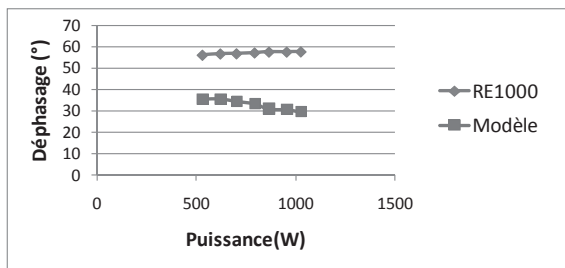


Figure 6 Déphasage mesuré et calculé

### 5. Conclusion

Nous avons présenté la validation d'une modélisation de machine Stirling à pistons libres destinée à une application de micro-cogénération. Cette validation a été effectuée en utilisant des résultats d'autres auteurs ainsi que les résultats expérimentaux d'une machine de type RE1000 essayée par la NASA. Les résultats montrent que la modélisation sous-estime les pertes de la machine d'environ 20% et que ce sont probablement les pertes par conduction et radiation à l'intérieur de la machine qui sont à l'origine de cet écart. La fréquence de

fonctionnement de la machine est correctement prédite par le modèle, le déphasage et le rapport de déplacement présentent un écart qui est probablement lié à au différentiel de puissance. Pour améliorer la précision du modèle, la prise en compte des pertes par conduction et radiation dans la machine paraît incontournable.

### Références

- [1] C. West, *Principals and applications of Stirling engines*, Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1986
- [2] G. Walker, G. Reader, O. Fauvel, E. Bingham, *The Stirling alternative*, Gordon and Breach Science Publishers, 1994
- [3] W.T. Beale, Free-Piston Stirling Engines – Some Model Tests and Simulations, *International Automotive Engineering Congress*, Detroit, Paper 690230, 1969.
- [4] W.T. Beale, G. Chen, *Small Stirling Free Piston Stirling Engines for Cogeneration*, Sunpower inc., Athens; Ohio, 1992.
- [5] Sylvie Bégot, Guillaume Layes, François Lanzetta, Steve Djetel, Philippe Nika, Régis Contreau, Modèle pour conception/ optimisation d'un moteur Stirling à pistons libres « mécanique », Congrès Français de Thermique, Perpignan, 24-27 Mai 2011
- [6] I. Urieli, D.M. Berchowitz, *Stirling cycle analysis*, Adam Hilger, Bristol, 1984
- [7] J. Boucher, *Influence du pilotage du déplaceur sur le comportement d'un cogénérateur à moteur Stirling et générateur électrique linéaire*, Thèse de doctorat, Université de Franche – Comté, 2007.
- [8] J. Boucher, F. Lanzetta, P. Nika, Optimization of a dual free piston Stirling engine, *Applied Thermal Engineering*, 27 (2007) 802–811
- [9] Jeffrey G. Schreiber, Steven M. Geng, and Gary V. Lorenz, RE-1000 Free-Piston Stirling Engine Sensitivity Test Results, NASA TM-88846, (1986)
- [10] E.D Rogdakis, N.A. Bormpilas, I.K. Koniakos, A thermodynamic study of the thermal performance of free piston stirling prime movers, *Energy Convers. Manage* 45(4) (2004) 575–93.
- [11] F. Formosa, Coupled thermodynamic–dynamic semi-analytical model of free piston Stirling engines, *Energy Conversion and Management* 52 (2011) 2098–2109

### Remerciements

Ce travail a bénéficié d'une aide de l'Agence Nationale de la Recherche portant la référence ANR-08-BLAN-0118-02 et d'une participation financière de l'entreprise GDF SUEZ.